Contrarellotge Matemàtica

Problemes del mes

Oriol Baeza Víctor López

Recull de problemes per a Eso i Batxillerat

Març 2020 – Juny 2022

Índex

1 2n ESO **2**

1.1 Curs 2021-2022 2

1.2 Curs 2020-2021 12

1.3 Curs 2019-2020 22

2 4t ESO **27**

2.1 Curs 2021-2022 27

2.2 Curs 2020-2021 39

2.3 Curs 2019-2020 50

3 2n Batxillerat **57**

3.1 Curs 2021-2022 57

3.2 Curs 2020-2021 69

3.3 Curs 2019-2020 84

1 2n ESO

1.1 Curs 2021-2022

Problema 1.1 (Juny 22)**.** La professora de matemàtiques demana als alumnes que pensin un número de 2 xifres (és a dir, entre 10 i 99). Aleshores, vol que canviïn les xifres d'ordre, i el número que els quedi l'hauran de sumar al número original.

Per exemple, si haguéssim començat amb el 13, canviant els dígit quedaria 31, i la suma final seria $13+31=44$. Suposant que els alumnes saben sumar perfectament, quants resultats diferents poden obtenir?

Solució. Vegem que els possibles resultats són exactament els múltiples de 11 entre els números 11 i 198.

Primer, en una direcció prenem un nombre inicial qualsevol $\overline{ab}$. Aleshores el resultat serà $\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11(a+b)$, que és un múltiple de 11. El mínim i el màxim venen de considerar els resultats per a 10 i per a 99, que són els valors inicials extrems.

D'altra banda, si prenem un número múltiple de 11 que estigui entre $11=11\cdot 1$ i $198=11\cdot 18$ sempre podem trobar un nombre original que ens donaria aquest resultat. En efecte, si tenim que el resultat és $11\cdot n$, amb n entre 1 i 18, aleshores, podem descompondre n en una suma de dos dígits a, b:

$$\begin{cases} n=1=0+1 \\ n=2=1+1 \\ n=3=1+2 \\ \quad\vdots \\ n=17=8+9 \\ n=18=9+9 \end{cases}$$

O de forma més concisa, prenent $a=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ i $b=\lceil \frac{n}{2} \rceil$ i llavors prendre $\overline{ab}$ com a nombre inicial.

Tot plegat, com que els resultats són els múltiples d'11 que estan entre el mínim $11=11\cdot 1$ i el màxim $198=11\cdot 18$, podem comptar que en són un total de $\boxed{18 \text{ resultats possibles}}$. □

Problema 1.2 (Maig 22)**.** En un concert, $\frac{5}{12}$ parts del públic assistent són adults (i n'hi ha al menys un). Més tard, un autobús arriba, portant 50 persones més al concert, de manera que ara $\frac{11}{25}$ són adults. Quants adults hi ha, com a mínim, ara que ha arribat l'autobús?

Solució. Si diem A al nombre d'assistents al concert inicialment, tenim que A ha de ser un múltiple de 12.

D'altra banda, un cop arribat al bús hi ha $A + 50$ assistents, i $A + 50$ ha de ser un múltiple de 25. En particular, això vol dir que A també és un múltiple de 25.

El mínim nombre A que satisfà que és un múltiple de 12 i de 25 és precisament $mcm(12, 25) = 300$. Amb aquesta quantitat, el nombre d'adults després d'arribar l'autobús serà

$$\frac{11}{25} \cdot (300 + 50) = 154$$

Per tant, el mínim és $\boxed{154 \text{ adults}}$. □

Problema 1.3 (Abril 22)**.** La Margalida vol iniciar una col·lecció de pedres de colors i, inicialment, en té 4 de color vermell.

En una ciutat, coneix un mercader que ofereix el canvi següent: si la Margalida li dona 1 pedra vermella, ell li donarà a canvi 3 pedres blanques.

En una segona ciutat, coneix una venedora ambulant que li ofereix un altre canvi: si la Margalida li dona 1 pedra blanca, ella li donarà a canvi 4 pedres vermelles.

La Margalida visita sovint les dues ciutats, i va fent intercanvis amb aquest mercader i aquesta venedora, fins que té 17 pedres. Si ara multiplica la quantitat de pedres vermelles i la quantitat de pedres blanques que té, quin número obté?

Solució. Primer de tot, vegem quantes pedres guanya la Margalida en cada canvi.

En la primera ciutat, el balanç del canvi és de $3 - 1 = +2$ pedres. D'altra banda, en la segona ciutat, el balanç del canvi és de $4 - 1 = +3$ pedres. Per tant, fent canvis, la Margalida va guanyant pedres de 2 en 2, o bé de 3 en 3.

Com que inicialment té 4 pedres, per tal d'arribar a 17 caldrà que sumi uns quants cops 2 i uns quants cops 3. Ara bé, si diem x als canvis en la primera ciutat, i y als canvis en la segona ciutat

$$4 + 3x + 2y = 17 \implies 3x + 2y = 13$$

Com que x, y són nombres enters, això només es pot assolir en els següents casos

$$\begin{cases} x = 1, y = 5 \\ x = 3, y = 2 \end{cases}$$

Vegem però en cada cas quantes pedres de cada color li quedarien. En general, si ha fet x intercanvis a la primera ciutat i y intercanvis a la segona, al final tindrà

$$\begin{cases} 4 + 4 \cdot x - 1 \cdot y & \text{vermelles} \\ 0 + 3 \cdot y - 1 \cdot x & \text{blanques} \end{cases}$$

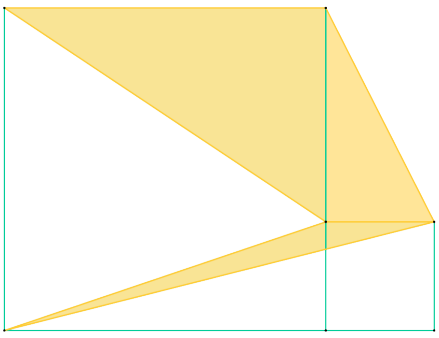
Per tant, en els diferents casos

$$x = 1, y = 5 \implies \begin{cases} 4 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 5 = 3 & \text{vermelles} \\ 0 + 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 14 & \text{blanques} \end{cases}$$

$$x = 3, y = 2 \implies \begin{cases} 4 + 4 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 14 & \text{vermelles} \\ 0 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 3 & \text{blanques} \end{cases}$$

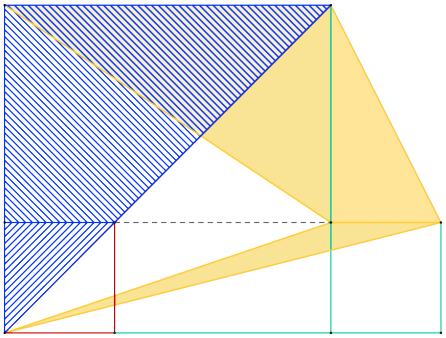
És a dir, en ambdós casos acaba amb 14 pedres d'un color i 3 pedres de l'altre color. Per tant, el producte de les dues quantitats és sempre $\boxed{14 \cdot 3 = 42}$. □

Problema 1.4 (Març 22)**.** En la figura següent tenim dos quadrats, el més gran amb àrea 2. En color groc, hi dibuixem un trapezi i un triangle. Quina és l'àrea d'aquests dos junts?



Solució 1. Primer de tot, recordem que l'àrea d'un triangle és la meitat de la base per l'altura, i la d'un trapezi, la meitat de la suma de bases per l'altura.

Per tant, si afegim els següents elements en la figura



Podem veure que el triangle blau té la mateixa àrea que el triangle groc, ja que ambdós tenen per base i per alçada el costat del quadrat petit.

Similarment, el trapezi blau té la mateixa àrea que el trapezi groc, ja que ambdós tenen per bases un costat del quadrat gran i un costat del quadrat petit, i a més l'alçada és la mateixa.

Tot plegat, l'àrea groga és la mateixa que l'àrea blava total: trapezi més triangle. Com que l'àrea blava és la meitat del quadrat gran, que tenia àrea 2, el resultat de l'àrea groga demanada és $\boxed{1}$. □

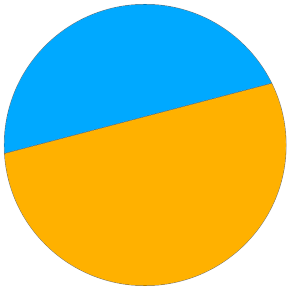
Solució 2. Diguem c al costat del quadrat petit, mentre que el quadrat gran té costat $\sqrt{2}$. Aleshores, usant les fórmules per a l'àrea d'un trapezi i d'un triangle tenim que l'àrea groga és

$$[\text{Àrea}] = \frac{1}{2}(c+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-c) + \frac{1}{2}c\cdot c = \frac{1}{2}\sqrt{2}^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^2 = 1$$

El mateix resultat que abans. □

Problema 1.5 (Febrer 22)**.** En Mario està organitzant un sopar amb els seus amics, i està cuinant una pizza molt gran. Voldrà tallar la pizza en uns quants trossos (no necessàriament iguals!), per poder repartir-los entre els seus amics. Ara bé, en Mario és molt gandul, i vol aconseguir el màxim nombre de trossos fent com menys talls possible, i fent només talls en línia recta.

Per exemple, si només fes un tall, només pot aconseguir dividir la pizza en 2 trossos.



Si fes dos talls, pot aconseguir 4 trossos.

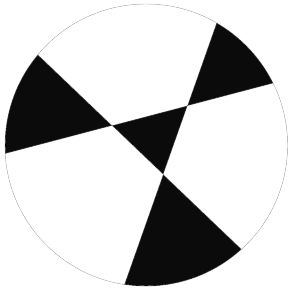
Si fes tres talls, podria aconseguir màxim 7 trossos.

En quants trossos pot dividir la pizza en Mario, si només fa 10 talls?

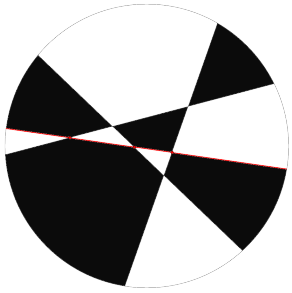
Solució. Primer de tot ens fixem en quants trossos nous apareixen amb cada tall.

Concretament, el segon tall ens dona $4 - 2 = 2$ trossos més, el tercer tall ens dona $7 - 4 = 3$ trossos més... En general, el tall n-èssim ens dona n trossos nous, com a molt.

Ho podem provar gràficament, donada una configuració on ja hem fet $n - 1$ talls



Com que els talls que fem són línies rectes, només poden tallar als altres talls ja existents en un únic punt cada vegada.



Per tant, es crearan $n-1+1=n$ regions noves. El $n-1$ surt de que per cada tall entre rectes generarà una nova regió, amb un $+1$ addicional que ve de l'última regió que també es converteix en dues.

Per tant, podem calcular el màxim nombre de trossos segons quants talls fem com

$$\begin{aligned}
1 \text{ tall} &\longrightarrow 2 \text{ trossos} \\
2 \text{ tall} &\longrightarrow 2+2=4 \text{ trossos} \\
3 \text{ tall} &\longrightarrow 2+2+3=7 \text{ trossos} \\
&\vdots \\
10 \text{ talls} &\longrightarrow 2+2+3+4+5+6+7+8+9+10=56 \text{ trossos}
\end{aligned}$$

És a dir, amb 10 talls en Mario podrà aconseguir $\boxed{\text{56 trossos de pizza}}$. □

Problema 1.6 (Gener 22)**.** Aquest any 2022 tindrà 365 dies. El Joan ha promès a la seva àvia que la trucarà cada 4 dies, començant l'1 de gener. Així mateix, la seva cosina Mar, diu que trucarà l'àvia cada 5 dies, començant el 4 de gener.

L'àvia diu que té un dia bonic si almenys un dels seus néts, el Joan o la Mar, l'han trucada. Quants dies bonics tindrà aquest 2022?

Solució. Enumerem els dies de l'1 al 365.

En Joan trucarà els dies

$$1, 1+4, 1+2\cdot 4, 1+3\cdot 4, \ldots, 1+91\cdot 4 = 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \ldots, 365$$

és a dir, els que siguin un número de la forma $1+m\cdot 4$. En particular, trucarà un total de 92 vegades.

D'altra banda, la Mar trucarà els dies

$$4, 4+5, 4+2\cdot 5, 4+3\cdot 5, \ldots, 4+72\cdot 5 = 4, 9, 14, 19, 24, 29, \ldots, 364$$

és a dir, els que siguin un número de la forma $4+n\cdot 5$. En particular, trucarà un total de 73 vegades.

Per comptar els dies en que rebrà alguna trucada, hem de comptar quants cops truca el Joan, sumar-li quants cops truca la Mar, i restar-li els dies en que truquen els dos (si no, aquests els estaríem comptant doble!).

Els dies en que trucaran alhora els dos són els números que es poden expressar tant com a $1+m\cdot 4$ o bé com $4+n\cdot 5$. Una ràpida inspecció ens dona que aquests són els números de la forma $9+k\cdot 20$, és a dir,

$$9, 9+20, 9+2\cdot 20, \ldots, 9+17\cdot 20 = 9, 29, 49, \ldots, 349$$

En particular, hi ha 18 dies en què trucaran els dos néts.

Per tant, tot plegat l'àvia tindrà

$$92 + 73 - 18 = 147$$

un total de $\boxed{147}$ dies bonics. □

Problema 1.7 (Desembre 21)**.** En una taula rodona hi caben 7 persones. A cada persona li assignem un nombre real de manera que, si recorrem la taula en sentit horari, cada nombre és la suma dels dos anteriors.

És a dir, si diem $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$ als números en qüestió, se satisfà

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + x_1 \\ x_4 = x_3 + x_2 \\ \quad \vdots \\ x_1 = x_6 + x_7 \\ x_2 = x_7 + x_1 \end{cases}$$

Quants d'aquests nombres són diferents de 0?

Solució. Diem $a = x_1$ i $b = x_2$ al valor dels dos primers, i seguirem les relacions imposades per trobar el valor dels altres.

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 = a + b \\ x_4 = x_2 + x_3 = b + (a + b) = a + 2b \\ x_5 = x_3 + x_4 = (a + b) + (a + 2b) = 2a + 3b \\ x_6 = x_4 + x_5 = (a + 2b) + (2a + 3b) = 3a + 5b \\ x_7 = x_5 + x_6 = (2a + 3b) + (3a + 5b) = 5a + 8b \end{cases}$$

Però ara, quan acabem de donar la volta, vegem què passa amb les últimes condicions.

$$\begin{cases} a = x_1 = x_6 + x_7 = (3a + 5b) + (5a + 8b) = 8a + 13b \\ b = x_2 = x_7 + x_1 = (5a + 8b) + a = 6a + 8b \end{cases} \implies \begin{cases} 7a + 13b = 0 \\ 6a + 7b = 0 \end{cases}$$

Però aquest és un sistema compatible determinat, ja que $\begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, i té com a única solució $(a, b) = (0, 0)$.

És a dir, l'única manera que se satisfacin les igualtats és que tots els números siguin 0. Per tant, la quantitat de nombres no nuls és $\boxed{0}$. □

Problema 1.8 (Novembre 21)**.** Una noia passeja pel bosc i es creua amb un elf i una fada. L'elf menteix sempre els dilluns, dimarts i dimecres, mentre que la resta de dies diu la veritat. D'altra banda, la fada menteix sempre els dijous, divendres i dissabtes, mentre que la resta de dies diu la veritat.

La noia s'amaga per no espantar-los i escolta la conversa que estan tenint:

— Ahir vaig mentir. —diu l'elf.

— Quina casualitat, jo també! —respon la fada.

Quin dia és avui?

Solució. Primer estudiem quin dia hauria de ser, per tal que l'elf o la fada estiguin dient la veritat o bé mentint.

Elf: Si avui l'elf diu la veritat, i ahir mentia, vol dir que som a dijous. Si avui l'elf menteix, vol dir que ahir va dir la veritat i avui menteix, per tant, som a dilluns.

Fada: Si avui la fada diu la veritat, i ahir mentia, vol dir que som a diumenge. Si avui la fada menteix, vol dir que ahir va dir la veritat i avui menteix, per tant, som a dijous.

Per tant, com que la realitat serà una combinació de l'elf i la fada dient la veritat o mentint, l'única que concorda és que avui sigui $\boxed{\text{dijous}}$.

És a dir, avui l'elf diu la veritat i la fada menteix. □

Problema 1.9 (Octubre 21)**.** L'Helena té 29 anys, i comença aquest curs com a professora de matemàtiques a un petit grup d'alumnes. A la primera classe, la professora els fa notar:

— La mitjana d'edat de tots nosaltres (alumnes i professora), és igual al nombre de persones que som.

i un alumne afegeix

— Però també és cert que la mitjana d'edat sense comptar la professora és igual al nombre d'alumnes!

Amb aquesta informació, quants alumnes hi ha a la classe de l'Helena?

Solució. Diguem n al nombre d'alumnes què hi ha a classe, i sigui E la suma de les edats de tots els alumnes. En particular, la suma de totes les edats serà $E + 29$, comptant també els de la professora.

Aleshores, la condició que la mitjana de les edats dels alumnes és igual al nombre d'alumnes es tradueix en

$$\frac{E}{n} = n \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 = E$$

D'altra banda, la condició que la mitjana de totes les edats és igual nombre de persones (n alumnes més 1 professora) es tradueix en

$$\frac{E+29}{n+1} = n+1 \quad \Longleftrightarrow \quad (n+1)^2 = E+29$$

Per tant, si restem les dues igualtats, tenim que

$$(n+1)^2 - n^2 = (E+29) - E \quad \Longleftrightarrow \quad 2n+1 = 29 \quad \Longleftrightarrow \quad n = 14$$

És a dir, que el nombre d'alumnes és $\boxed{n=14}$.

En efecte, podem comprovar que

$$14^2 = E \quad \Longrightarrow \quad E+29 = 225 = 15^2 = (14+1)^2$$

□

Problema 1.10 (Setembre 21)**.** L'Agatha comença ara el curs, i coneix la seva nova companya de classe, la Berta. Després de presentar-se, diuen els seus números preferits a i b, respectivament.

Aleshores, les noies s'adonen que si sumen $a+b$, el resultat acaba amb la xifra 3; i que si sumen a^3+b^3, el resultat també acaba en la xifra 3. Quina és la última xifra de la suma a^2+b^2?

Solució. En realitat només ens importa la xifra final de a i b, així que podem suposar que en realitat aquests dos números estan entre $1, 2, 3, \ldots, 9$.

Llavors, si a i b són nombres d'una xifra tals que $a+b$ acaba en 3, tenim les següents possibilitats. Mirant per a cada una en què acaba a^3+b^3 trobarem l'opció correcta.

$$\begin{aligned}
&a=2, b=1 \implies a^3+b^3 = 8+1 = 9 \quad \text{NO}\\
&a=3, b=0 \implies a^3+b^3 = 27+0 = 27 \quad \text{NO}\\
&a=4, b=9 \implies a^3+b^3 = 64+729 = 793 \quad \text{SÍ}\\
&a=5, b=8 \implies a^3+b^3 = 125+512 = 637 \quad \text{NO}\\
&a=6, b=7 \implies a^3+b^3 = 216+343 = 559 \quad \text{NO}
\end{aligned}$$

i no cal comprovar més casos, ja que la resta serien intercanviant a i b. Per tant,

l'únic factible que hem trobat és que un dels nombres acabi en 4 i l'altre en 9.

En aquest cas, trobem que la suma demanda acabarà

$$a^2 + b^2 = 4^2 + 9^2 = 16 + 81 = 97$$

en la xifra $\boxed{7}$. □

1.2 Curs 2020-2021

Problema 1.11 (Juny 21)**.** La Laura, la Marta i la Núria es reparteixen una certa quantitat de caramels. Un cop repartits, s'adonen del següent

— **Laura:** Si em comprés 6 caramels més, aleshores tindria el mateix nombre de caramels que la Marta i la Núria juntes.

— **Marta:** Quina casualitat! Si jo comprés 6 caramels més, tindria el mateix nombre que la Laura i la Núria juntes.

— **Núria:** El mateix dic, si em comprés 6 caramels més, tindria el mateix nombre que la Laura i la Marta juntes.

Quants caramels tenen entre les tres?

Solució. Si diem L, M, N a la quantitat de caramels de cada noia, respectivament, podem escriure

$$\begin{cases} L + 6 = M + N \\ M + 6 = L + N \\ N + 6 = L + M \end{cases}$$

I el que cerquem és el total $L + M + N$. Ara, si sumem aquestes tres equacions ens queda

$$(L + M + N) + (6 + 6 + 6) = (M + N) + (L + N) + (L + M) = 2(L + M + N)$$

Per tant, aïllant trobem

$$18 = L + M + N$$

És a dir, en total les noies tenen $\boxed{18\,\text{caramels}}$. □

Problema 1.12 (Maig 21)**.** La Berta afirma que ha trobat l'enter positiu de dues

xifres més petit que compleix el següent: en dividir-lo entre 2 s'obté precisament el producte de les xifres del nombre original.

Quin és el nombre que ha trobat?

Solució. Si prenem un nombre de dues xifres en general $\overline{xy} = 10x + y$, veiem que s'ha de complir

$$\frac{\overline{xy}}{2} = x \cdot y \quad \Longrightarrow \quad \frac{10x+y}{2} = x \cdot y \quad \Longrightarrow \quad 5x + \frac{y}{2} = x \cdot y$$

Ara, notem que podem factoritzar l'última relació, com segueix

$$x \cdot y - 5x - \frac{y}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y - 5x - \frac{y}{2} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)(y-5) = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad (2x-1)(y-5) = 5$$

Tanmateix, com que el número 5 és primer, l'única manera d'expressar-lo com a producte de dos nombres enters positius és $1 \cdot 5$ o bé $5 \cdot 1$. Estudiant els dos casos obtenim les dues possibles solucions:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 1 \implies x = 1 \\ y - 5 = 5 \implies y = 10 \end{cases} \implies \text{no té sentit, } y \text{ és un dígit}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = 5 \implies x = 3 \\ y - 5 = 1 \implies y = 6 \end{cases} \implies \text{solució vàlida } \overline{xy} = 36$$

En efecte, podem comprovar que $\boxed{36}$ és el número que ha trobat la Berta, i és el més petit ja que en particular és l'únic.

$$\frac{36}{2} = 18 = 3 \cdot 6$$

□

Problema 1.13 (Abril 21)**.** El rectangle de la figura està partit en 9 **quadrats** diferents. L'alçada del rectangle és 32. Quina amplada té?

Solució. Si el quadrat més petit de tots té costat x, i el seu veí més petit té costat

y, és possible expressar els costats dels altres quadrats només fent servir x i y.

El quadrat que hi ha a la dreta del més petit té costat que és la suma dels costats dels quadrats que té a la seva esquerra: $x+y$. El quadrat de baix de tot i a la dreta té costat que és la suma dels costats del seus veïns per sobre: $x+(x+y)=2x+y$. El quadrat de dalt de tot i a la dreta té costat $(x+y)+y=x+2y$. El quadrat de baix de tot i al mig té costat $x+(2x+y)=3x+y$.

Per trobar el costat del segon quadrat més petit podem sumar els costat dels dos quadrats de baix i restar els costats dels dos quadrats a la seva dreta (vegeu la figura). El resultat és:

$$(2x+y)+(3x+y)-(x+y)-y=5x+2y-x-y-y=4x$$

El costat del quadrat de baix de tot i a l'esquerra és la suma dels costats dels dos veïns a la seva dreta: $4x+(3x+y)=7x+y$. Finalment, podem trobar el costats del quadrat de dalt de tot i a l'esquerra de dues maneres diferents: primer, sumant els costats dels seus veïns de baix: $7x+y+4x=11x+y$, i segon, sumant els costats del quadrats que té a la dreta i restant el costat del quadrat del mig: $(x+2y)+y-(4x)=3y-3x$.

Tenim dues expressions per al quadrat de dalt de tot a l'esquerra. Per tant, podem concloure que $3y-3x=11x+y$. Sumem $3x$ als dos costats de l'equació i queda $3y=14x+y$. Restem y als dos costats de l'equació i queda $2y=14x$. Dividim els dos costats entre dos i queda $y=7x$.

Finalment, l'alçada del rectangle és

$$(7x+y)+(11x+y)=18x+2y.$$

Ja sabem que $y=7x$ i per tant l'alçada és

$$18x+2y=18x+2\cdot 7x=18x+14x=32x.$$

Ens diuen que l'alçada és 32 i per tant podem concloure que $x=1$ i $y=7$. Ja podem substituir aquests valors per trobar els costats de tots els 9 quadrats.

Sumant els costats dels quadrats de baix trobem que l'amplada del rectangle és $14+10+9=\boxed{33}$. □

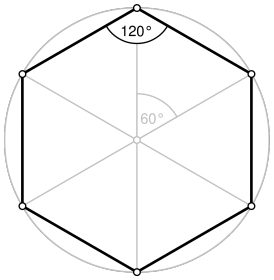
Problema 1.14 (Març 21)**.** La Martina ha dibuixat un n-àgon regular, és a dir, un

polígon amb n costats iguals. L'Oriol vol saber quants costats té, però ella només li respon el següent

— Els angles interiors del meu polígon valen 150°.

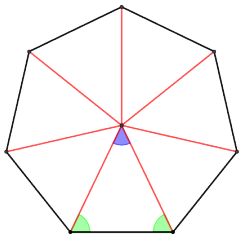
Amb aquesta informació, saps dir quant val n? És a dir, quants costats té el polígon de la Martina?

Nota: Per exemple, en un hexàgon regular (6 costats) l'angle interior val 120°. O per exemple, en un octàgon regular (8 costats), val 135°.



Solució. Anem a calcular quant val l'angle interior d'un polígon regular de n costats.

Primer de tot, hem de veure que podem dividir el polígon en triangles iguals, unint els vèrtexs amb el centre. Per veure-ho clar, raonem primer per a un heptàgon (7 costats):



Ara, aquí és clar que l'angle blau és 1/7 part de l'angle central, que val 360° tot, és a dir

$$\angle Blau = \frac{360^\circ}{7}$$

Aleshores, com el triangles dibuixats són isòsceles, els angles verds són iguals i podem veure que valen

$$180^\circ = \angle Blau + \angle Verd + \angle Verd \quad \Longrightarrow \quad \angle Verd = \frac{1}{2}(180^\circ - \frac{360^\circ}{7})$$

Llavors, l'angle interior de l'heptàgon és precisament dos cops l'angle verd. En conclusió, l'angle interior de l'heptàgon val

$$\angle\text{heptàgon} = 2\angle Verd = 2\frac{1}{2}(180^\circ - \frac{360^\circ}{7}) = 180^\circ - \frac{360^\circ}{7}$$

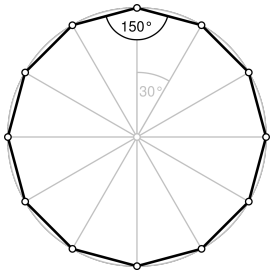
Si fem això per un polígon regular de n costats, obtindrem que l'angle interior és

$$\angle Blau = \frac{360^\circ}{n} \quad \Longrightarrow \quad \angle Verd = \frac{1}{2}(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}) \quad \Longrightarrow \quad \angle n\text{-àgon} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Si la Martina diu que l'angle interior del seu polígon regular és de 150°, podem aïllar n com

$$150^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$$

En conclusió, el polígon de la Martina té $\boxed{n = 12 \text{ costats}}$.



□

Problema 1.15 (Febrer 21)**.** Na Núria calcula el següent número

$$A = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{99\ldots99}_{\text{110 dígits}}$$

Quina és la suma dels dígits de A?

Solució. El truc per trobar la suma de dígits és considerar cada terme com

$$\begin{aligned} 9 &= 10 - 1 \\ 99 &= 100 - 1 \\ 999 &= 1000 - 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De manera que resulta evident que la suma és

$$A = (10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots+(10^{110}-1) = \big(10+100+1000+\ldots+10^{110}\big)-110$$

$$\Longrightarrow A = \underbrace{11\ldots11}_{\text{108 dígits}}110 - 110 = \underbrace{11\ldots11}_{\text{108 dígits}}000$$

Per tant, la suma de dígits de A serà $\underbrace{1+1+\ldots+1+1}_{\text{108 cops}} = \boxed{108}$. □

Problema 1.16 (Gener 21)**.** L'Anna escriu a la seva llibreta la següent seqüència:

$$5,\ 9,\ 13,\ 17,\ldots,2021 \quad \text{(va sumant 4)}$$

D'altra banda, el Bernat escriu a la seva llibreta la següent seqüència:

$$6,\ 11,\ 16,\ 21,\ldots,2021 \quad \text{(va sumant 5)}$$

Si els dos s'aturen quan arriben al 2021, en quants números coincideixen les seves seqüències?

Solució. Anem a veure que els números comuns en les dues seqüències són els de la forma $20k+1$ per a k natural, és a dir, són:

$$21,\ 41,\ 61,\ 81,\ 101,\ldots,\ 2021$$

Per a això, notem que els números que escriu l'Anna són els múltiples de 4 més 1, en altres paraules els $4m+1$, per a m natural qualsevol.

Mentre que els números que escriu el Bernat són els múltiples de 5 més 1, en altres paraules els $5n+1$, per a n natural qualsevol.

Per tant, si coincideixen en algun número aquest haurà de ser un múltiple de 4 més 1 i alhora un múltiple de 5 més 1. Això només passa si aquest número és un múltiple de 20 més 1.

$$\begin{cases} x = 4m+1 \\ x = 5n+1 \end{cases} \Longrightarrow x = 20k+1$$

Això implica, com hem dit, que els números en què coincidiran seran

$$21,\ 41,\ 61,\ 81,\ 101, \ldots,\ 2021$$

en particular, aquests són

$$20 \cdot 1 + 1 = 21$$

$$20 \cdot 2 + 1 = 41$$

$$20 \cdot 3 + 1 = 61$$

$$\vdots$$

$$20 \cdot 101 + 1 = 2021$$

Per tant, en tenim $\boxed{101}$, i aquesta serà la quantitat de números en què coincidiran les dues seqüències. □

Problema 1.17 (Desembre 20)**.** Hem comprat un gaspatxo al supermercat, i l'etiqueta dels seus ingredients diu el següent:

Ingredients: tomàquet (41%), aigua, pebrot, cogombre, oli d'oliva (3,2%), vinagre, sal, all i conservants (1,2%).

i sabem que estan ordenats per quantitat, de més a menys, i dos consecutius poden tenir el mateix tant per cent. Quina és el mínim % d'aigua que hi ha?

Solució. És evident que per minimitzar l'aigua, haurem de maximitzar la resta. Per tant, tindrem el màxim possible de vinagre, sal i all, que estan limitats per l'oli d'oliva

- $3,2\%$ de vinagre,
- $3,2\%$ de sal,
- $3,2\%$ d'all,

D'altra banda, per a l'aigua, el pebrot i el cogombre hauran d'estar tots en la mateixa proporció, diguem x. Llavors, per completar el 100% amb la resta d'ingredients tindrem

$$41 + x + x + x + 3,2 + 3,2 + 3,2 + 3,2 + 1,2 = 100 \implies x = \frac{45}{3} = 15$$

És a dir, hi ha un mínim de $\boxed{15\%}$ d'aigua en el gaspatxo. □

Problema 1.18 (Novembre 20)**.** Cada dia a classe, en Miquel escriu la data a la pissarra en la forma *dd/mm/aaaa*. Un dia, avorrit, es pregunta quins dies tenen una data amb tots els dígits diferents, per exemple: 25/06/1987. Sabries dir quin serà el pròxim dia en què passarà això?

Solució. Abans d'anar provant a la babalà, unes observacions importants són que si comencem amb un any 2???

- Cal un 0 o un 1 per escriure el mes (primer dígit).
- Cal un 0, un 1, o un 3 per escriure el dia (primer dígit). Notem que no pot ser un 2 ja que surt a l'any.

Vegem que, com a conseqüència, l'any no pot contenir cap 0 ni cap 1.

Això passa ja que per exemple, si l'any té un 1, ens veiem obligats a posar un 0? al mes. Llavors el dia hauria de ser 3?.

$$3?/0?/2??? \qquad \text{(on l'any té algun 1)}$$

Però aquest segon dígit només podria ser 0 o 1 (els mesos tenen màxim 31 dies), per tant, contradicció perquè repetiríem dígit. El cas en què l'any té un 0 es raona igual.

Aleshores, l'any més petit que podem posar és el 2345, i cercarem una data amb aquest any.

Ara, si posem el mes 01, veurem que no podem posar cap dia. Com els dígits $2, 3, 4, 5$ ja estan usats, el següent mes que podem provar és el 06.

$$??/06/2345$$

I per a aquest ja trobem un dia que funciona, el 17. Per tant, hem trobat el proper dia en què la data tindrà tots els dígits diferents

$$\boxed{17/06/2345}$$

□

Problema 1.19 (Octubre 20)**.** Un palíndrom és un nombre que es llegeix igual d'esquerra a dreta que de dreta a esquerra, per exemple: 1234321. La Sabina escriu en un paper tots els palíndroms de tres dígits (entre 000 i 999). Després, es dedica a sumar-los tots. Quin número ha obtingut finalment?

Solució. Primer de tot estudiem una mica quins nombres ha escrit la Sabina. Qualsevol d'aquests palíndroms tindrà el mateix dígit al principi i al final, mentre que el dígit central pot ser qualsevol.

La manera bonica de sumar això és adonar-se que podem fer parelles de manera que cada parella sumi 999. Per exemple, fent $000 + 999$, $121 + 878$ o $434 + 565$. En general, si tenim $\overline{aba}$, la seva parella serà $\overline{(9-a)(9-b)(9-a)}$.

Llavors comptem quants palíndroms tenim. En són $10 \cdot 10 = 100$, ja que triem el primer i el segon dígit (entre 0 i 9), i el tercer ja queda determinat. Per tant, tindrem $\frac{100}{2} = 50$ parelles.

Com que cada parella sumava 999, tenim que en total la suma serà de $999 \cdot 50 = \boxed{49950}$, i hem acabat.

Solució 2. Una altra solució, menys elegant, pot ser organitzant les sumes en paquets de la forma $\overline{x0x}, \overline{x1x}, \overline{x1x}, \ldots, \overline{x9x}$, on x serà un dígit fix. Llavors podem separar la suma com

$$\overline{x0x} + \overline{x1x} + \ldots + \overline{x9x} = \overline{x0x} + (\overline{x0x} + 10) + (\overline{x0x} + 20) + \ldots (\overline{x0x} + 90) =$$

$$= \overline{x0x} \cdot 10 + (10 + 20 + \ldots 90) = 10 \cdot \overline{x0x} + 450$$

On recordem que x serà qualsevol dels dígits. Fent això per a $x = 0, 1, \ldots 9$, i sumant-ho tot obtindrem

$$(10 \cdot 000 + 450) + (10 \cdot 101 + 450) + (10 \cdot 202 + 450) + \ldots + (10 \cdot 909 + 450) =$$

$$= 10(101 + 202 + \ldots + 909) + 450 \cdot 10 = 10 \cdot 4545 + 4500 = 49950$$

Per tant, el resultat que cerquem és $\boxed{49950}$. □

Problema 1.20 (Setembre 20)**.** Un meteoròleg ha estudiat durant tot un any (365 dies) una determinada ciutat. Cada dia, s'ha anotat si plovia o no, i si feia fred o no. Si sabem que

- Ha plogut 54 dies.
- Ha fet fred 42 dies
- Hi ha 29 dies que ha fet fred i ha plogut.

Quants dies no ha fet fred ni ha plogut?

Solució. Fem un esquema dels dies, i el que se'ns demana el valor de D.

	PLOU	NO PLOU
FRED	A	B
NO FRED	C	D

Ara, la primera condició es tradueix en $A+C=54$, la segona condició en $A+B=42$, i la tercera en $A=29$.

Per últim, tenint en compte que en un any hi ha 365 dies, és a dir, $A+B+C+D=365$, obtenim el sistema.

$$\begin{cases} A+C=54 \\ A+B=42 \\ A=29 \\ A+B+C+D=365 \end{cases}$$

D'on obtenim que

$$\begin{cases} C=54-A=54-29=25 \\ B=42-A=42-29=13 \end{cases}$$

I aleshores podem fer

$$D=365-A-B-C=365-29-25-13=298$$

En conclusió, hi ha hagut $\boxed{298 \text{ dies}}$ que no ha fred ni ha plogut. □

1.3 Curs 2019-2020

Problema 1.21 (Juny 20)**.** En Josep acaba de comprar uns quants bolígrafs i unes quantes llibretes. Cada llibreta costava 5 euros, i cada boli, 3 euros.

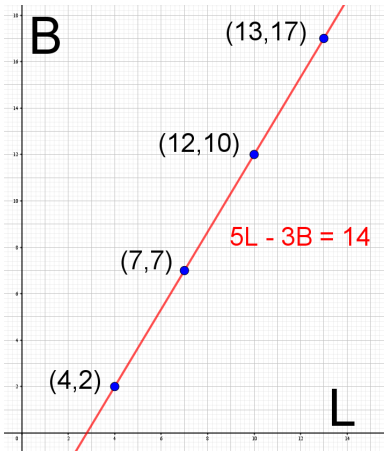
Llavors, en Josep diu que s'ha gastat 14 euros més en llibretes que en bolis, i també que ha comprat 8 bolis de color blau (per tant, ha comprat 8 o més bolis).

Quantes llibretes sabem segur que ha comprat en Josep, com a mínim?

Solució. Si diem B al nombre de bolígrafs i L al nombre de llibretes, el que diu el Josep és que

$$5L - 3B = 14$$

podem trobar solucions d'aquesta equació, per exemple si mirem a la gràfica de la recta



$$L = 4, \quad B = 2$$

$$L = 7, \quad B = 7$$

$$L = 10, \quad B = 12$$

$$L = 13, \quad B = 17$$

ja que només ens fixem en valors de L, B naturals (no tindria sentit tenir mitja llibreta!).

Ara bé, com en Josep diu que té 8 bolis de color blau, en particular tenim que $B \geq 8$. La solució més petita que compleix això és la que hem trobat

$$L = 10, \quad B = 12 \implies 5 \cdot 10 - 3 \cdot 12 = 14$$

Per tant, en Josep ha comprat com a mínim $\boxed{10 \text{ llibretes}}$. □

Problema 1.22 (Maig 20)**.** En un partit d'handbol 6 jugadors han marcat un nombre de gols diferent cadascú. Sense comptar el jugador que menys ha marcat, els altres sumen 54 gols. Quants gols pot haver marcat com a molt aquest jugador que no comptàvem?

Solució. Anem a veure que la puntuació més baixa de totes pot ser 7. Partim de la condició que 5 números naturals diferents sumen 54. Si el més petit d'ells fos 9, aleshores la resta haurien de ser, com a mínim, $10, 11, 12, 13$. Ara bé, aquests sumarien llavors

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55 > 54 \implies \text{contradicció}$$

Per tant, tenim que el més petit no pot ser 9. En canvi, sí que pot ser 8, només cal considerar els següents números

$$8 + 10 + 11 + 12 + 13 = 54$$

Que compleix l'enunciat. Per tant, el 6è jugador ha fet necessàriament menys de 8 gols, és a dir, com a molt $\boxed{7 \text{ gols}}$. □

Problema 1.23 (Abril 20)**.** En un petit poble hi viuen 50 persones. Com ja se sap, als pobles tothom és molt xafarder, i si algú sap un secret, sempre s'acaba escampant.

Imagina que el dilluns, una persona li explica un secret al seu amic. Suposa, a més a més, que a cada dia que passa tothom qui sap el secret li explica a dues altres persones que encara no el saben.

Per exemple, dilluns hi ha dues persones que el coneixen, dimarts n'hi haurà sis... sabries dir quin dia tot el poble coneixerà el secret?

Solució. Anem a veure que el dia que tots ho sabran és dijous. Si el dilluns hi ha dues persones que ho saben, al següent dia, cada una d'elles li haurà explicat a dues persones més. Per tant, ho sabran ja $2 + 2 \cdot 2 = 6$ persones.

Més general, podem veure que si un dia hi ha n persones que ho saben, el dia següent hi haurà

$$\#(\textit{persones que ja ho saben})+\#(\textit{persones que ho descobreixen aquest dia}) = n+2\cdot n = 3n$$

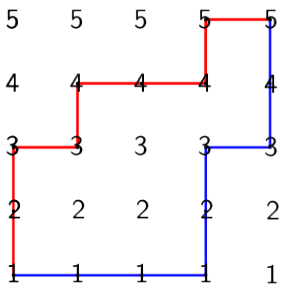
ja que cadascuna de les n persones ho explicarà a dues més.

Per tant, tenim que el nombre de persones que ho sabran cada dia és

$$2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{\cdot 3} 18 \xrightarrow{\cdot 3} 54$$

Per tant, podem veure que $\boxed{\text{dijous}}$ ja ho sabrà tot el poble. □

Problema 1.24 (Març 20)**.** Un cargol es mou seguint les línies d'una quadrícula 5x5 com a la figura. Comença abaix a l'esquerra i es mou només cap a la dreta (→) o cap amunt (↑), fins arribar a dalt a la dreta.

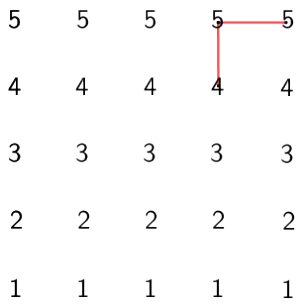


Com que va tan lent, s'avorreix i decideix fer un joc: va multiplicant tots els números per sobre dels quals passa. Quants camins pot seguir el cargol de manera que el resultat del producte sigui un quadrat perfecte?

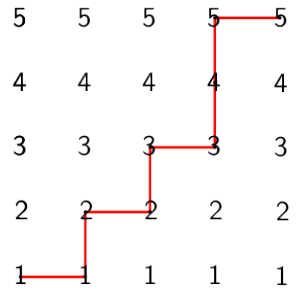
Per exemple, al camí vermell acaba amb el producte $1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^3\cdot 5^2 = 28800$*; mentre que el blau, amb* $1^4\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4\cdot 5 = 360$*, cap dels dos un quadrat.*

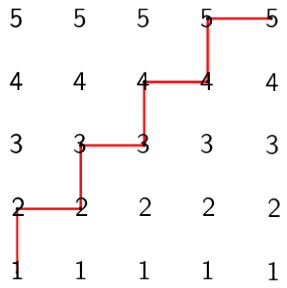
Solució. Cal notar que per tal que el producte sigui un quadrat, haurem de passar per un nombre parell de vegades per 5's, 3's i 2's. D'altra banda, podem passar per tants 4's i 1's com vulguem. Ara, per construir els camins començarem des del final. En primer lloc, cal notar que l'últim pas ha de ser horitzontal ja que, si no, només tindríem un 5 al producte final.

Ara, podem provar que passa si continuem per la fila dels 5's. En aquest cas, haurem de passar per sobre de quatre 5's, però llavors quan baixem no tindrem espai per afegir un nombre parell de 3's i de 2's. Per tant, ens veiem obligats a baixar a la fila dels 4's. Ens queden per fer tres moviments horitzontals, i hem de passar mínim per dos 2's i dos 3's.



Si passem quatre cops per un d'aquests, no tindrem espai a afegir el mínim de l'altre. És a dir, el nostre camí haurà de tenir exactament dos 2's i dos 3's. I ara ja és evident que els únics camins que ens van bé són els següents





Que ens donen un resultat de $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5^2 = 60^2$ i $1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = 120^2$, respectivament. És a dir, el cargol pot seguir $\boxed{2}$ camins diferents. □

2 4t ESO

2.1 Curs 2021-2022

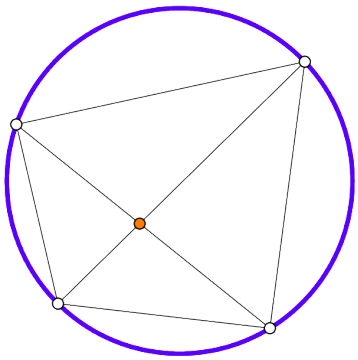
Problema 2.1 (Juny 22)**.** Sobre una circumferència tracem 5 punts diferents, i hi dibuixem tots els segments possibles unint parelles d'aquests punts.

Quants triangles podem comptar, com a màxim, en el dibuix resultant?

Solució. És més senzill distingir els triangles segons el nombre de vèrtexs que tinguin sobre la circumferència.

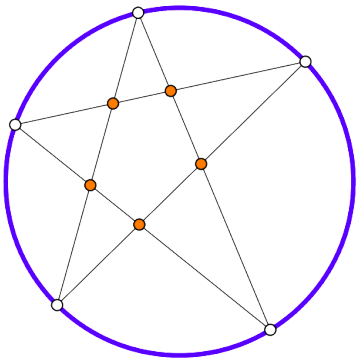
Els triangles amb tots els vèrtexs sobre la circumferència surten de triar tres punts d'entre els cinc punts possibles, per tant, n'hi ha $\binom{5}{3} = 10$.

Els triangles amb dos vèrtexs sobre la circumferència i un interior es formen a partir d'unir els segments entre quatre punts



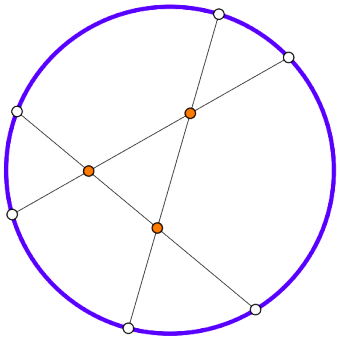
i n'apareixen quatre. Per tant, en tenim $4 \cdot \binom{5}{4} = 4 \cdot 5 = 20$.

Els triangles amb un vèrtex sobre la circumferència i dos interiors es formen a partir d'unir els segments entre cinc punts



i n'apareixen cinc. Per tant, en tenim $5 \cdot \binom{5}{5} = 5 \cdot 1 = 5$.

Per últim, veiem que no podem tenir triangles amb cap vèrtex sobre la circumferència, ja que allargant-ne els costats veiem que necessitaríem mínim sis punts, malgrat en tenim només cinc.



En conclusió, el nombre total de triangles que podem tenir és, com a molt, $10+20+5 = \boxed{35 \text{ triangles}}$.

Nota: Que el màxim es pot assolir es pot justificar si considerem que anem afegint els punts d'un en un de manera que en cada pas tenim el màxim de triangles possibles.

La solució presentada pot acabar-se per una quantitat n general de punts. En el cas de triangles amb els tres vèrtexs interiors, ens apareixen $1 \cdot \binom{n}{6}$ triangles. Tot plegat, per $n \geq 6$ la solució resulta ser

$$\binom{n}{6} + 5\binom{n}{5} + 4\binom{n}{4} + \binom{n}{3}$$

□

Problema 2.2 (Maig 22)**.** En Víctor posa els números 21 i 30 en una caixa. Aleshores, hi va afegint nombres de la següent manera:

- Primer, tria dos enters a, b.
- Aleshores, afegeix a la caixa el nombre $a \cdot 21 + b \cdot 30$.

Per exemple, podria afegir a la caixa els números: $4 \cdot 21 = 84$, o també $2 \cdot 21 - 5 \cdot 30 = -108$.

Dels números de l'1 al 10, quants poden estar dins de la caixa?

Solució. Recordem primer la identitat de Bézout. Si $d = mcd(x, y)$ és el màxim comú divisor de x i y, aleshores sabem que existeixen enters a, b tals que $ax+by = d$. De fet, l'algorisme d'Euclides generalitzat ens dona la manera de trobar aquests a, b en qüestió.

En el nostre exemple, en particular, sabem que podrem trobar a, b de manera que $a \cdot 21 + b \cdot 30 = mcd(21, 30) = 3$. Concretament, podem usar l'algorisme d'Euclides per trobar el màxim comú divisor

$$\begin{aligned} 30 &= 1 \cdot 21 + 9 \\ 21 &= 2 \cdot 9 + 3 \\ 9 &= 3 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

Per tant, $mcd(30, 21) = 3$ i, ara, tornar enrere per trobar els a, b

$$\begin{aligned} 3 &= 21 - 2 \cdot 9 \\ &= 21 - 2 \cdot (30 - 21) \\ &= 21 + 2 \cdot 21 - 2 \cdot 30 \\ &= 3 \cdot 21 - 2 \cdot 30 \end{aligned}$$

És a dir, $a = 3$ i $b = -2$. En definitiva, podem aconseguir el número 3 dins de la caixa.

Més important, un cop tenim el 3 és clar que podem aconseguir qualsevol número múltiple de 3. Concretament, prenent $a = 3 \cdot k$ i $b = -2 \cdot k$, tenim

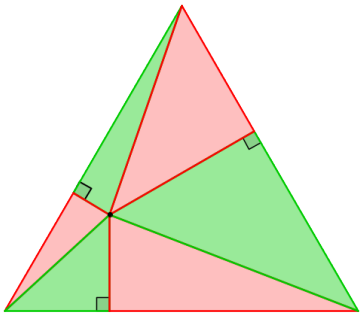
$$(3 \cdot k) \cdot 21 + (-2 \cdot k) \cdot 30 = k \cdot (3 \cdot 21 - 2 \cdot 20) = k \cdot 3$$

Així que qualsevol múltiple de 3 podria estar a la caixa. Vegem que, de fet, aquests són els únics. En efecte, com 21 i 30 són els dos múltiples de 3, qualsevol combinació lineal $a \cdot 21 + b \cdot 30$ també ho serà. És a dir, només podem aconseguir múltiples de 3.

En conclusió, els únics números que podem tenir a la caixa són els múltiples de 3. Per tant, entre 1 i 10, concretament podem aconseguir el 3, el 6 i el 9, és a dir, un total de $\boxed{3 \text{ números}}$. □

Problema 2.3 (Abril 22)**.** Un artista està treballant en la seva última obra. Agafa un tros de tela en forma de triangle equilàter de costat 1 metre, i hi dibuixa un punt

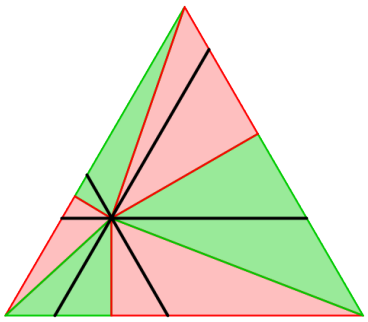
interior qualsevol. Des d'aquest punt, traça les projeccions perpendiculars sobre els costats, i pinta les regions resultants amb colors vermell i verd, tal com es pot apreciar en la figura.



Si diem R als metres quadrats de pintura vermella, i G als metres quadrats de pintura verda que ha usat, respectivament, quant val $R - G$?

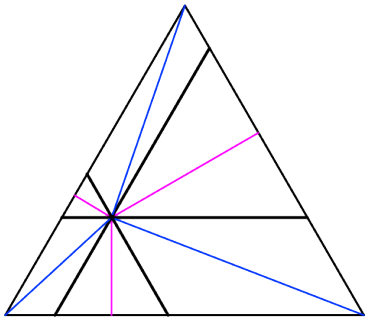
Solució. Vegem que usarà la mateixa quantitat de pintura verda que vermella.

En primer lloc, tracem les paral·leles als costats del triangle que passen pel punt.



Aleshores, el triangle gran queda dividit en tres paral·lelograms i tres triangles equilàters més petits.

Les diagonals dels paral·lelograms en divideixen l'àrea per la meitat. Similarment, les alçades en lila divideixen els triangles equilàters en dues meitats d'igual àrea.



Per tant, dins de cada paral·lelogram hi ha la mateixa quantitat de pintura vermella i pintura verda, i el mateix per cada triangle equilàter petit. Tot plegat, en el triangle equilàter original tenim que l'àrea vermella i l'àrea verda són iguals, i concloem que $\boxed{R - G = 0}$.

□

Problema 2.4 (Març 22)**.** En Josep té 26 cotxes de joguina, **tots ells iguals**. Un dia, avorrit, es posa a jugar de la següent manera. Reparteix els cotxes en dos equips, cadascun amb mínim un integrant. Aleshores, per cada parella de cotxes d'equips oposats (és a dir, un cotxe d'un equip i un de l'altre) disputa una carrera.

El Josep se n'adona que pot repartir els dos equips de diverses maneres*. Si fes les carreres pertinents per totes les possibles distribucions d'equips, quantes carreres hauria de fer en total?

Nota: Atenció, com els cotxes són iguals, en Josep **NO** distingeix, per exemple, els casos on els equips tenen $(12, 14)$ o $(14, 12)$ integrants.

Solució. Primer de tot, notem que les maneres de repartir els equips és fent grups de mida

$$\{1, 25\}, \{2, 24\}, \ldots, \{12, 14\}, \{13, 13\}$$

Per tant, el que se'ns demana calcular és la suma

$$S = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 24 + \ldots + 12 \cdot 14 + 13 \cdot 13$$

Podem reescriuee com a diferències de quadrats i agrupar

$$S = (13 - 12)(13 + 12) + (13 - 11)(13 + 11) + \ldots + (13 - 1)(13 + 1) + 13 \cdot 13$$

$$= 13 \cdot 13^2 - 12^2 - 11^2 - \ldots - 1^2$$

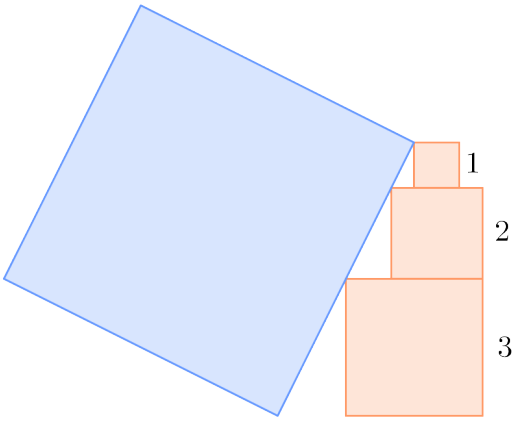
Ara, usant la fórmula de suma dels quadrats,

$$S = 13 \cdot 13^2 - \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6}$$

$$= 13(13^2 - 50) = 13 \cdot 119 = 1547$$

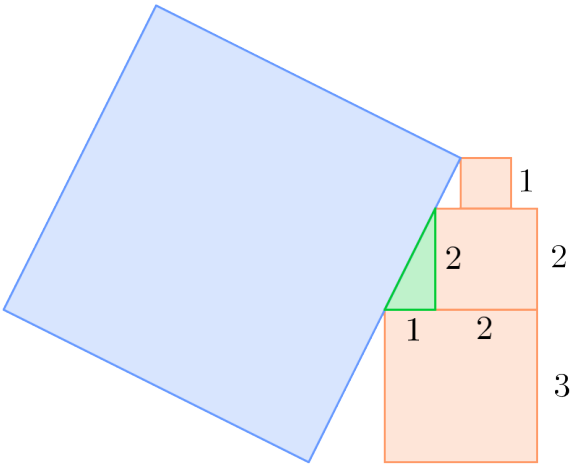
És a dir, si en Josep fes totes les possibles distribucions d'equips, i per cadascuna totes les carreres, n'hauria de fer un total de $\boxed{1547}$. □

Problema 2.5 (Febrer 22)**.** Jugant amb unes peces quadrades, hem construït la següent figura

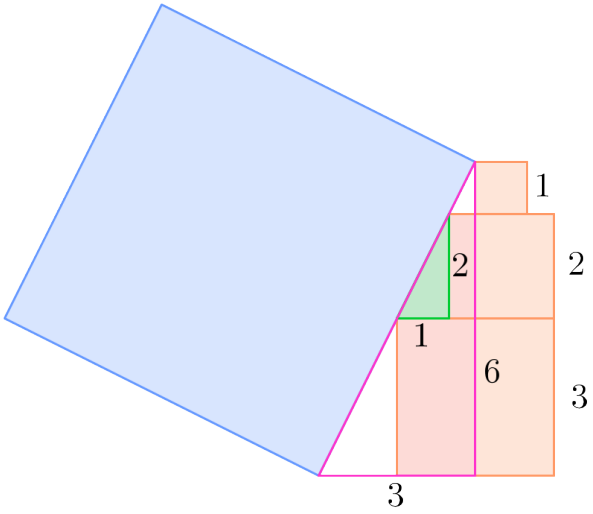


Tanmateix, només coneixem que els quadrats taronges tenen costats $1, 2$ i 3, respectivament, de petit a gran. Quina és l'àrea del quadrat blau?

Solució. Si ens fixem en el triangle verd petit que queda atrapat pels quadrats, podem veure que els seus costats són: 2 l'altura i $3 - 2 = 1$ l'amplada.



D'altra banda, vegem quines són les mides del triangle rosa més gran



L'altura és clar que serà $6 = 1 + 2 + 3$, la suma dels costats taronges. Pel que fa a l'amplada, hem de notar que els triangles verd i rosa són semblants, ja que tenen els mateixos angles. Per tant, deduïm que l'amplada del rosa ha de ser

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Per tant, ara podem aplicar el teorema de Pitàgores per trobar el costat del quadrat blau. Si li diem c a aquest valor

$$c = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$$

Així que l'àrea del quadrat blau val precisament

$$\boxed{[\grave{A}rea] = c^2 = 45}$$

□

Problema 2.6 (Gener 22)**.** El 2022 és un número *especial*, compleix que cada un dels seus dígits es pot expressar com la resta de dos altres dígits del nombre. En efecte,

$$\begin{cases} 2 = 2 - 0 \\ 0 = 2 - 2 \end{cases}$$

Altres exemples de nombres especials són: $330, 1001, \ldots$ Quin serà el proper any, sense comptar 2022, que tornarà a ser un número *especial*?.

Solució. Vegem que el proper any especial serà el 2200. Clarament, aquest número satisfà la condició

$$\begin{cases} 2 = 2 - 0 \\ 0 = 2 - 2 \end{cases}$$

Per veure que és el següent, vegem que no hi ha més anys especials entre 2023 i 2199.

Cas 1 Si l'any comencés amb $20ab$, per tal de poder expressar 0 com a diferència de dues xifres, caldrà que tinguem $a = b$ per fer $0 = a - b$, o que algun de a, b sigui 2.

Cas 1.1 En el cas que el nombre sigui $20aa$, aleshores ens cal que $2 = a - 0$, però ens trobem amb el nombre 2022, que ja és el que teníem d'inici.

Cas 1.2 Si tenim $a = 2$, llavors el nombre hauria de ser $202b$, però aleshores cal $b = 2 - 0 = 2$ o $b = 2 - 2 = 0$, contradicció, ja que cerquem un any després de 2022.

Cas 1.3 Si tenim $b = 2$, llavors el nombre hauria de ser $20a2$, però aleshores cal $a = 2 - 0 = 2$ o $a = 2 - 2 = 0$, contradicció, ja que cerquem un any després de 2022.

Cas 2 Si l'any comencés amb $21ab$, tenim diferents subcasos segons com expressem2 com a resta d'altres dígits.

Cas 2.1 Si $a - 1 = 2$, aleshores $a = 3$, però ens caldrà $b - 2 = 3$, és a dir, $b = 5$. Però no podem expressar 5 com a diferència de dues xifres, contradicció. Si $b - 1 = 2$, la situació és anàloga.

Cas 2.2 Si $a-b=2$, aleshores a serà el valor més gran d'entre els dígits. Si $a>2$ en particular no el podrem expressar com a resta d'altres dígits, més petits. Altrament, si $a=2$, caldrà $b=0$ però aleshores no podem expressar 1 com a resta d'altres dígits. El cas $b-a=2$ és anàleg.

Per tant, descartats els casos 20.. i 21.., i comprovat que $\boxed{2200}$ és especial, aquest és l'any demanat. □

Problema 2.7 (Desembre 21)**.** La Sara s'ha comprat un calendari d'advent, amb 24 xocolatines, distribuïdes en una quadrícula de 6 files per 4 columnes.

Ara bé, la seva germana vol fer-li la guitza, i decideix robar-li algunes de les seves xocolatines (mínim una). Ho fa de manera que no en tregui dues de la mateixa fila o de la mateixa columna. Amb aquesta restricció, de quantes maneres pot fer-ho?

Solució. Considerem la quadrícula de 6 files i 4 columnes on estan les xocolatines. La germana haurà de triar xocolatines, sense repetir fila ni columna.

Primer de tot, és evident que si en triés 5 o més, hauria de repetir files, pel principi del colomar. Per tant, hem de considerar els casos en que treu $1, 2, 3$ o 4 xocolatines.

Cas 1 Si treu una sola xocolatina, pot triar-ne qualsevol, és a dir 24 opcions.

Cas 2 Si treu dues xocolatines, en traurà de dues columnes. Per triar quines columnes tenim $\binom{4}{2}=6$ maneres. Aleshores, de la primera columna pot triar d'entre 6 files, i per la segona pot triar d'entre 5 files. Tot plegat, pot fer-ho de $6\cdot 6\cdot 5=180$ maneres.

Cas 3 Si treu tres xocolatines, en traurà de tres columnes. Per triar quines columnes tenim $\binom{4}{3}=4$ maneres. Aleshores, de la primera columna pot triar d'entre 6 files, per la segona pot triar d'entre 5 files, i per la tercera en pot triar només d'entre 4 files. Tot plegat, pot fer-ho de $4\cdot 6\cdot 5\cdot 4=480$ maneres.

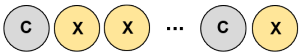
Cas 4 Si treu quatre xocolatines, triarà una xocolatina per cada columna. Per cada una d'aquestes, ens falta triar quina fila. Per a la primera columna, tenim 6 files possibles, per a la segona, ja hi ha una fila que no podem repetir, per tant, hi ha 5 opcions possibles. Per la tercera columna, hi ha 4 opcions possibles i per la última només ens queden 3 opcions possibles.

Tot plegat, tenim $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$ maneres possibles.

És a dir, la germana de la Sara pot prendre-li xocolatines de $24+180+480+360 = \boxed{1044}$ maneres diferents.

□

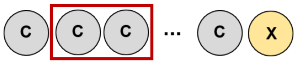
Problema 2.8 (Novembre 21)**.** L'Anna té 7 monedes, cadascuna de les quals té probabilitat 1/2 de caure cara i 1/2 de caure creu. Direm que l'Anna fa una tirada si: llença cada una de les 7 monedes individualment i posa el resultat en fila



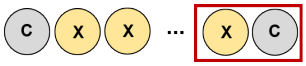
Llavors, l'Anna pot girar dues monedes consecutives de la fila, tants cops com vulgui i les monedes que vulgui, sempre que siguin consecutives. Si fent això **NO pot aconseguir que totes les monedes siguin cara** direm que la tirada ha estat *lletja*.

Per exemple, possibles canvis que podria fer en la tirada de dalt són canviant les dues primeres

o bé canviant la segona i la tercera



o bé fins canviar les dues últimes



i així tants cops com vulgui. Quina és la probabilitat que la tirada hagi sigut lletja?

Nota: El resultat esperat és una fracció irreductible a/b.

Solució. Primer de tot caracteritzem les tirades lletges. Una tirada és lletja si el nombre de cares inicialment és un nombre parell.

En efecte, cada cop que fem un canvi de dues monedes consecutives, el nombre de cares en tota la fila pot:

1. mantenir-se igual (com podria ser el primer exemple de canvi).
2. augmentar en 2 (com podria ser el segon exemple de canvi).
3. disminuir en 2 (com podria ser el contrari del segon exemple de canvi).

En qualsevol cas, la paritat de nombre de cares és sempre la mateixa. Així doncs, si inicialment teníem un nombre parell de cares, serà impossible arribar a tenir 7 cares, un nombre senar.

Per tant, el que se'ns demana és la probabilitat de tirar 7 monedes i obtenir un nombre parell de cares.

Una manera elegant de calcular-ho és veure que tenim una bijecció: considerar la tirada inicial *contrària*. És a dir, podem aparellar les tirades (OXOOOXX) i (XOXXXOO). L'important d'aquesta parella és que en una tirada el nombre de cares és parell mentre que en l'altra és senar.

Per tant, tenim meitat de tirades lletges i meitat no, i com que totes les tirades tenen la mateixa probabilitat, deduïm que la probabilitat d'una tirada lletja és precisament $\boxed{1/2}$. □

Problema 2.9 (Octubre 21)**.** Direm que un nombre enter és ¡em¿ masnoví ¡/em¿ si compleix que es pot expressar com la suma de 100 nombres enters consecutius.

Quants nombres masnovins hi ha entre -2021 i 2021, ambdós inclosos?

Per exemple, el 5050 és un nombre masnoví ja que $5050 = 1 + 2 + \ldots + 100$.

Nota 1: Els nombres enters són $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Nota 2: Una història que s'explica sovint és com Carl Gauss, amb tan sols vuit anys, va deduir el valor d'aquesta suma $S = 1 + 2 + \ldots + 100$. La professora els ho havia posat com a problema per tenir-los entretinguts una estona, però ell ràpidament va trobar una manera elegant de resoldre-ho, aparellant els nombres com

$$2 \cdot S = (1 + 2 + \ldots + 100) + (100 + 99 + \ldots + 1) =$$

$$= (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (100 + 1) = 101 \cdot 100 \implies S = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

Solució. Vegem que els nombres masnovins són precisament els que acaben en 50.

Prenem 100 números enters qualssevol

$$n-49, n-48, \ldots, n+49, n+50$$

Aleshores la seva suma és

$$100 \cdot n + (-49+49) + (-48+48) + \ldots + (-1+1) + 0 + 50 = 100n + 50$$

Per tant, hem caracteritzat els nombres masnovins com aquells que són un múltiple de 100 més 50.

Llavors, en l'interval donat, els nombres masnovins són

$$\{-1950, -1850, \ldots, -150, -50, 50, 150, \ldots, 1850, 1950\}$$

On $1950 = 19 \cdot 100 + 50$. Per tant, comptant-los surten $\boxed{\text{40 nombres masnovins}}$. □

Problema 2.10 (Setembre 21)**.** La Laura comença aquest any com a professora d'institut. Li han assignat una classe de 15 nens i nenes, i ara ha d'organitzar les funcions següents, que duen a terme els alumnes. - Un delegat/da. - Dues persones més (diferents del delegat/da) que s'encarreguin de l'agenda col·lectiva de la classe.

De quantes maneres podria triar els alumnes, si els escollís ella?

Solució. Si comencem triant el delgat, podem escollir qualsevol dels 15 alumnes.

D'altra banda, de les 14 persones restants hem de triar-ne dues. Això es pot fer precisament de

$$\binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2}$$

maneres.

Per tant, la quantitat total de possibilitats serà, ja que les tries són independents, el producte

$$15 \cdot \binom{14}{2} = \boxed{1365}$$

i aquesta és la quantitat de maneres que cercava la Laura.

Com a comentari, veiem que hagués donat el mateix resultat si haguéssim triat primer les dues persones encarregades de l'agenda

$$\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2}$$

i, després, d'entre les 13 restants escollíssim el delegat/da. En total tindríem

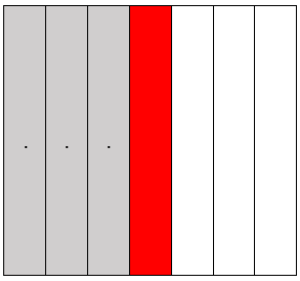
$$\binom{15}{2} \cdot 13 = 1365$$

les mateixes possibilitats. □

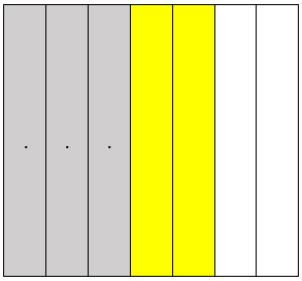
2.2 Curs 2020-2021

Problema 2.11 (Juny 21)**.** L'Anna acaba de mudar-se i està decorant casa seva. Té moltíssims llibres vermells i grocs (més de 7 de cada color), i vol omplir una prestatgeria on hi caben exactament 7.

L'omplirà per ordre, d'esquerra a dreta. Per fer-ho, segueix el següent procés: pot triar un dels dos colors. Llavors, si tria vermell afegeix 1 llibre vermell a la prestatgeria

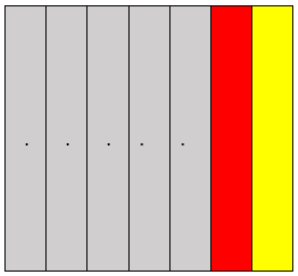


O bé, si tria groc, afegeix 2 llibres grocs seguits a la prestatgeria.



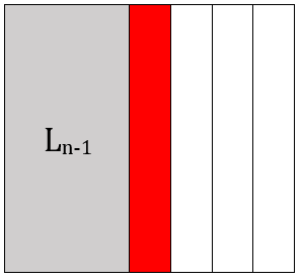
De quantes maneres diferents pot omplir la prestatgeria?

Aclariment: el fet que per col·locar llibres grocs hagin de ser dos seguits, fa que els dos últims llibres **no** puguin ser vermell i groc:

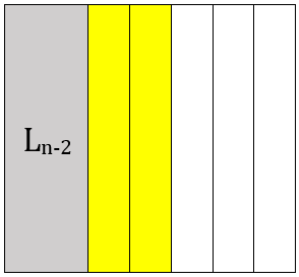


Solució. Si diem L_n el nombre de maneres d'omplir una prestatgeria de mida n, podem trobar la següent relació. Si ens fixem en el llibre en la posició n, pot ser que sigui vermell o que sigui groc.

En el primer cas, tenim L_{n-1} maneres d'omplir les primeres $n-1$ posicions de la prestatgeria, i després posem un llibre vermell a la posició n.



En el segon cas, si afegim el llibre n és groc, necessàriament el $n-1$ també era groc. Per tant, tenim L_{n-2} maneres d'omplir les primeres $n-2$ posicions, i després vindrien dos grocs en les posiciones $n-1$ i n.



Per tant, en total amb els dos casos el nombre de maneres amb n posicions és

$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Notem a més que $L_1 = 1$, ja que si només hi ha un lloc, només podem posar un llibre vermell.

Amb aquestes observacions, podem concloure que els L_n són nombres de Fibonacci:

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 2$$

$$L_3 = 3$$

$$L_4 = 5$$

$$L_5 = 8$$

$$L_6 = 13$$

$$L_7 = 21$$

$$L_8 = 34$$

$$\vdots$$

En particular, com que al problema ens demana per a 7 posicions, el nombre de maneres d'omplir la prestatgeria és $\boxed{L_7 = 21}$. □

Problema 2.12 (Maig 21)**.** En Pep s'està preparant per córrer la marató, i surt a entrenar-se cada dia. El recorregut que fa consisteix a anar a una altra ciutat i tornar. En concret, l'anada consta de tres parts:

1) un tram de pujada fins al cim de la muntanya,

2) un tram pla,

3) un tram de baixada fins arribar a l'altra ciutat

i la tornada és el mateix camí però a l'inversa (és a dir, en l'ordre $3-2-1$).

Sabem que en Pep fa les pujades a una velocitat de 8 km/h, les baixades a 10 km/h, i que ha tardat 3 minuts més en fer l'anada $(1-2-3)$ que en fer la tornada $(3-2-1)$.

Quants km de més té el tram 1 que el tram 3?

Solució. Primer de tot, hem d'observar que a l'anada tindrem pujada en el tram 1 i baixada en el 3, però a la tornada serà pujada al 3 i baixada a l'1.

El que farem serà plantejar un sistema d'equacions. Diguem l_1, l_2, l_3 a les longituds dels trams 1, 2 i 3, respectivament. El que volem trobar és precisament $l_1 - l_3$.

També, diguem v a la velocitat que porta en Pep al tram pla, que desconeixem però que no ens caldrà resoldre. Així doncs, recordant que

$$\text{temps} = \frac{\text{distància}}{\text{velocitat}}$$

podem escriure per a l'anada (1 pujada, 3 baixada)

$$\frac{l_1}{8} + \frac{l_2}{v} + \frac{l_3}{10} = t_{anada}$$

I podem fer el mateix per a la tornada (3 pujada, 1 baixada)

$$\frac{l_3}{8} + \frac{l_2}{v} + \frac{l_1}{10} = t_{tornada}$$

Encara ens falta utilitzar una dada del problema: la diferència entre els temps d'anada i tornada. Per fer-la aparèixer i alhora cancel·lar les incògnites l_2 i v, el que podem fer és restar les dues expressions que acabem de trobar.

$$\Rightarrow \left(\frac{l_1}{8} - \frac{l_3}{8}\right) + \left(\frac{l_2}{v} - \frac{l_2}{v}\right) + \left(\frac{l_3}{10} - \frac{l_1}{10}\right) = t_{anada} - t_{tornada}$$

Posant la diferència de temps en hores, $3\,\text{min} = 0,05\,\text{h}$, ja que les velocitats estaven en km/h, podem resoldre finalment

$$\Rightarrow (l_1 - l_3)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) = 0,05 \Rightarrow l_1 - l_3 = 2\,\text{km}$$

En conclusió, el tram 1 fa $\boxed{2\,\text{km}}$ més que el tram 3. □

Problema 2.13 (Abril 21)**.** En un país llunyà existeixen dos tipus de monedes: les daurades que valen 4, i les platejades que valen 1.

Un mercader ven únicament els següents productes, d'acord amb els preus:

a) 4 monedes daurades ↔ una rosa i 2 monedes platejades de canvi

b) 5 monedes daurades i 1 moneda platejada ↔ un llibre

c) 2 monedes daurades $\leftrightarrow$ una capsa de dolços i 1 moneda platejada de canvi

Un client arriba amb monedes per valor total 150 i, després de comprar-hi, se'n va amb unes poques monedes que juntes **no** arriben a un valor de 10. Quantes monedes té al final?

Solució. L'observació clau en aquest problema és que, en qualsevol compra que ofereix aquest mercader, el client sempre disminuirà la seva quantitat de diners en un número múltiple de 7.

Concretament

a) paga 4 daurades i de canvi 2 platejades $\rightarrow$ balanç: $-4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = -14$

b) paga 5 daurades i 1 platejada $\rightarrow$ balanç: $-5 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -21$

c) paga 2 daurades i de canvi 1 platejada $\rightarrow$ balanç: $-2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = -7$

Per tant, com que inicialment tenim monedes per valor de $150 = 7 \cdot 21 + 3$, el valor final haurà de ser 150 menys un múltiple de 7.

$$150, 143, 136, \ldots, 17, 10, 3$$

Encara més, com sabem que les monedes finals sumen menys de 10, podem deduir que la seva suma serà $150 - 7 \cdot 21 = 3$.

L'única manera d'aconseguir un valor de 3 és usant monedes platejades, ja que amb una sola de daurada ja ens passaríem. Per tant, podem concloure que el client ha marxat amb $\boxed{3\,\text{monedes}}$, en particular, platejades. □

Problema 2.14 (Març 21)**.** Tenim un quadrat de 2×2 caselles, i tenim 3 colors diferents.

Volem pintar les caselles de manera que no hi hagi dues caselles adjacents (és a dir, que comparteixen un costat) amb el mateix color. De quantes maneres podem fer-ho?

Aclariment: dos quadrats es consideren diferents, encara que difereixin només en una rotació un de l'altre. Per exemple, aquestes són dues formes diferents de pintar el quadrat:

$$\begin{array}{cc} verd & blau \\ blau & verd \end{array} \qquad \begin{array}{cc} blau & verd \\ verd & blau \end{array}$$

Solució. Vegem que podem pintar les 2×2 caselles de 18 maneres diferents.

Per fer-ho, anirem columna per columna. Diguem x, y, z als colors.

La primera columna la podem pintar com vulguem, amb l'única condició que el color de dalt i el color de baix siguin diferents. Per tant, tenim 3 opcions pel color de dalt i 2 pel color de baix, amb un total de $3 \cdot 2 = 6$ possibilitats.

$$\begin{array}{cccccc} x & x & y & y & z & z \\ y & z & x & z & x & y \end{array}$$

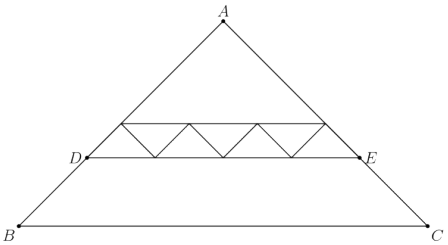
Ara, suposem que a la primera hem posat els colors x i y. Mirem aleshores quines combinacions podem posar a la segona columna. Podem fer

$$\begin{array}{cc} x & y \\ y & x \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & y \\ y & z \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & z \\ y & x \end{array}$$

és a dir, tenim 3 possibilitats. Com que aquestes possibilitats de la segona ho podem fer per cada opció de la primera, hem de multiplicar els valors.

En conclusió, podem pintar el quadrat de $6 \cdot 3 = \boxed{18}$ maneres diferents. □

Problema 2.15 (Febrer 21)**.** En el següent dibuix, tots els triangles que apareixen són semblants al triangle gran ABC, que és isòsceles amb $AB = AC$.



Si cada un dels 7 triangles més petits té àrea 1, i el triangle ABC té àrea 40, quina és l'àrea del trapezi $DBCE$?

Solució. Per trobar l'àrea del trapezi, el que farem serà trobar l'àrea del triangle ADE i restar-li a l'àrea total del triangle ABC.

Ara, sabem que el triangle ADE és semblant a cadascun dels 7 triangles petits. En particular, com que la base d'ADE és 4 cops la base d'un petit, la seva àrea serà $4^2 = 16$ cops l'àrea d'un petit.

$$[ADE] = 4^2 \cdot 1 = 16$$

Per tant, tal com hem dit, l'àrea del trapezi $DBCE$ és la diferència

$$[DBCE] = [ABC] - [ADE] = 40 - 16 \Longrightarrow \boxed{[DBCE] = 24}$$

□

Problema 2.16 (Gener 21)**.** Ara que comença un nou any, na Júlia busca propietats sobre el número 2021. Ara, diu que estava dividint 2021 entre un nombre natural de tres xifres, i que el residu que li ha donat és 12. Quin és aquest nombre desconegut de tres xifres?

Solució. La idea aquí és expressar la divisió de la següent manera. Si diem x al nombre desconegut, tenim que

$$\text{2021 entre } x \text{ dona residu 12} \quad \Longrightarrow \quad 2021 = q \cdot x + 12$$

On q serà un nombre enter (que no és rellevant per al problema). Aleshores, passant el 12 restant tenim que

$$2021 - 12 = 2009 = q \cdot x$$

Per tant, cal que el nombre x que cerquem sigui un divisor de 2009. Si mirem els divisors naturals d'aquest número, són:

$$1,\ 7,\ 41,\ 49,\ 287,\ 2009$$

Com que x ha de tenir tres xifres, llavors l'única possibilitat és que el número cercat sigui $\boxed{x = 287}$.

Efectivament, podem comprovar que $2021 = 7 \cdot 287 + 12$. □

Problema 2.17 (Desembre 20)**.** Tenim dos quadrats, amb costats de longituds enteres a i b, respectivament. Suposem que la suma de les seves superfícies és igual a la suma dels seus perímetres. Si $a \geq b$, quantes parelles (a, b) compleixen aquesta condició?

Solució. En primer lloc, expressem en termes matemàtics la condició del problema. La superfície dels quadrats serà

$$a^2 + b^2$$

mentre que el perímetre d'un quadrat més el perímetre de l'altre serà

$$4a + 4b$$

És a dir, sabem que

$$a^2 + b^2 = 4a + 4b$$

El que podem fer és tractar aquesta igualtat com una equació de segon grau on la variable és b. Aleshores, resolent obtenim

$$b^2 - 4b + a(a-4) = 0 \implies b = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot a(a-4)}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - a(a-4)}$$

A continuació, hem de recordar que a i b són enters i positius, així que per començar sabem que el que queda dins de l'arrel haurà de ser un quadrat perfecte. Provant per a a podem veure que

$$\begin{cases} a = 1 \implies \sqrt{4 - 1(1-4)} = \sqrt{7} & \text{no és enter} \\ a = 2 \implies \sqrt{4 - 2(2-4)} = \sqrt{8} & \text{no és enter} \\ a = 3 \implies \sqrt{4 - 3(3-4)} = \sqrt{7} & \text{no és enter} \\ a = 4 \implies \sqrt{4 - 4(4-4)} = 2 & \\ a = 5 \implies \sqrt{4 - 5(5-4)} = \sqrt{-1} & \text{no és real!} \end{cases}$$

I a partir de $a \geq 5$, l'expressió dins de l'arrel serà negativa i, per tant, b no seria real. Per tant, hem vist que a priori l'única solució serà $a = 4$. Si comprovem quin valor de b donaria

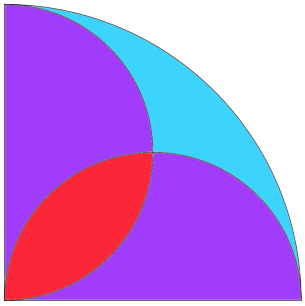
$$a = 4 \implies b = 2 \pm \sqrt{4 - 4(4-4)} = 2 \pm 2$$

Com a, b són enters positius, obtenim finalment que l'única solució possible és la positiva, és a dir

$$(a, b) = (4, 4) \qquad 4^2 + 4^2 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4$$

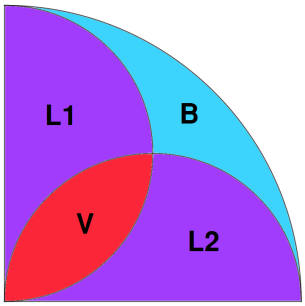
Així que només hi ha $\boxed{\text{1 parella}}$ (a, b) que satisfaci l'enunciat. □

Problema 2.18 (Novembre 20)**.** Dos amics estan intentant pintar el següent dibuix, on la base fa 2 metres de longitud.



Quants m^2 de pintura blava més que de pintura vermella necessitaran?

Solució. Primer de tot, posem nom a les quatre regions que apareixen, segons el color: lila 1, lila 2, blau i vermell



Aleshores, podem calcular l'àrea del quart de cercle gran (que té radi 2 segons l'enunciat), i que alhora correspon a la suma de totes les regions com

$$L_1 + L_2 + B + V = \frac{1}{4}(\pi \cdot 2^2) = \pi$$

D'altra banda, podem calcular l'àrea dels semicercles petits (de diàmetre 2, per tant,

de radi 1), que són $L_1 + V$ el vertical i $L_2 + V$ l'horitzontal, com

$$\begin{cases} L_1 + V = \frac{1}{2}(\pi \cdot 1^2) = \frac{\pi}{2} \\ L_2 + V = \frac{1}{2}(\pi \cdot 1^2) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ara, com que cerquem la quantitat $B - V$, el que podem fer és restar aquestes dues igualtats a la primera de totes

$$\big(L_1 + L_2 + B + V\big) - \big(L_1 + V\big) - \big(L_2 + V\big) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

i el que obtenim és precisament

$$B + V - V - V = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B - V = 0}$$

Així, que s'han usat els mateixos m^2 de pintura blava que de pintura vermella i la diferència demanada és $\boxed{0}$. □

Problema 2.19 (Octubre 20)**.** Suposa que x, y són dos nombres reals tals que

$$x \cdot y,\ x - y,\ x + y$$

estan en una progressió aritmètica en aquest ordre. Quantes parelles (x, y) compleixen aquesta propietat?

Nota: Una progressió aritmètica és una seqüència de números $a, a+d, a+2d, a+3d...$, on la diferència entre dos termes consecutius és un nombre fix d.

Solució. Podem trobar fàcilment la diferència de la progressió restant dos termes consecutius, per exemple, els últims dos.

$$d = (x + y) - (x - y) = 2y$$

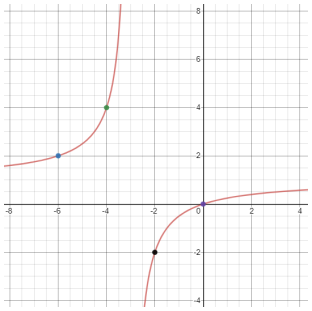
D'altra banda, també la podem trobar restant els dos primers termes, així que igualant obtenim

$$(x - y) - xy = d \implies x - y - xy = 2y \implies xy + 3y - x = 0$$

Per tant, el que hem de comptar són el nombre de solucions (x, y) d'aquesta última equació.

$$xy + 3y - x = 0 \implies y = \frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$$

Aquesta equació en els reals té infinites solucions, prenent per a qualsevol x, la $y = 1 - \frac{3}{x+3}$



El conjunt de solucions és precisament la gràfica d'aquesta funció (i, en particular, els punts marcats corresponen a solucions enteres).

Per tant, tenim $\boxed{\text{infinites parelles}}$ de (x, y) amb aquesta propietat. □

Problema 2.20 (Setembre 20)**.** L'Ot s'ha trobat nou peces, cada una amb un dígit diferent de l'1 al 9, de quan jugava de petit. Ara, intenta escriure un nombre amb la següent propietat: el nombre descrit per les peces (no cal usar-les totes) es pot partir de manera que els dígits que quedin a l'esquerra sumin el mateix que els dígits que quedin a la dreta. Per exemple: el nombre 2451 podem separar-lo com 24|51 (ja que $2 + 4 = 6 = 5 + 1$); o bé, el nombre 819 podem separar-lo com 81|9 (ja que $8 + 1 = 9$). Quin és el nombre amb aquesta propietat més gran que pot escriure l'Ot?

Solució. Per començar, notem que la suma de tots els dígits del nombre ha de ser parell, ja que haurem de dividir-la en dues meitats iguals.

Com que $1+2+3+\cdots+9 = 45$, com a molt la suma de tots els dígits usats serà 44 (això és amb tots menys l'1). Llavors escriurem un nombre amb aquesta propietat usant els dígits $2, 3, 4, \ldots, 8, 9$.

Quan fem la separació, volem que cada meitat sumi $44/2 = 22$. Si comencem posant un 98... a l'esquerra (per tal que sigui el més gran possible), i volem que sumin $22 = 9 + 8+?$, hi haurà d'anar un 5.

És a dir, sabem que el nombre serà 985... Com que a l'altra meitat del nombre hi aniran els dígits $2, 3, 4, 6, 7$ (que ja sumen el que toca $2+3+4+6+7 = 22$), només ens cal ordenar-los per que quedi el nombre més gran possible.

Per tant, obtenim $\boxed{98576432}$, i aquest és el nombre més gran que podrà escriure l'Ot. Efectivament compleix, separant com hem dit $985|76432$ amb $9+8+5 = 22 = 7+6+4+3+2$. □

2.3 Curs 2019-2020

Problema 2.21 (Juny 20)**.** Prenem el número 6 i, repetidament, fem alguna de les dues operacions següents:

$x \mapsto x - 3$, és a dir, restem 3 al número

$x \mapsto x^2$, és a dir, elevem el número al quadrat

L'Anna, la Berta i la Carlota proven de fer aquest procés cada una pel seu compte (cadascú pot triar una operació diferent a cada pas, i fer diferent nombre de passos). Comencen totes amb el número 6 i, passada una estona, diuen:

Anna: jo he arribat al número 2018

Berta: jo he arribat al número 2019

Carlota: jo he arribat al número 2020

Només hi ha una persona que diu la veritat, qui és?

Solució. Anem a veure que només la Berta pot dir la veritat.

L'observació clau és que en qualsevol de les dues operacions, el residu al dividir entre 3 no varia: sempre tindrem un múltiple de 3. En efecte, comencem amb un número que és $6 = 3 \cdot 2$, múltiple de 3.

Si tenim un número $3k$ i li restem 3, obtenim

$$(3k) - 3 = 3(k-1)$$

que també és un múltiple de 3.

Si tenim un número $3k$ i l'elevem al quadrat, obtenim

$$(3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

que de nou és múltiple 3.

És a dir, tots els números que podem obtenir han de ser de la forma $3k$: un múltiple de 3. Llavors, com que

$$2018 = 3 \cdot 673 - 1 \qquad 2019 = 3 \cdot 673 \qquad 2020 = 3 \cdot 673 + 1$$

podem concloure que l'Anna i la Carlota han d'estar mentint, i és la $\boxed{\text{Berta}}$ qui diu la veritat.

Un exemple de com pot arribar-hi és

$$6 \xrightarrow{-3} 3 \xrightarrow{*^2} 9 \xrightarrow{*^2} 81 \xrightarrow{-3} \cdots \xrightarrow{-3} 45 \xrightarrow{*^2} 2025 \xrightarrow{-3} 2022 \xrightarrow{-3} 2019$$

□

Problema 2.22 (Maig 20)**.** Diguem x_1, x_2 a les dues solucions de l'equació

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

Ara, volem construir una equació

$$x^2 - 3x + c - 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

De manera que x_1, x_2 també siguin solucions d'aquesta. Quan val c?

Solució. Dividint la primera equació per x tenim que

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

Agrupant a la segona equació tenim

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

I si ara fem servir que

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

Llavors tenim

$$\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

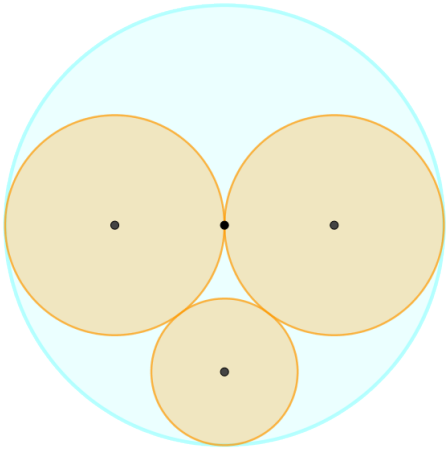
Per tant, ara podem substituir el valor que hem trobat al principi i tenim

$$x+\frac{1}{x}=3 \implies \left(3^2-2\right)-3(3)+c=0$$

$$9-2-9+c=0 \implies c=2$$

El valor que busquem és $\boxed{c=2}$ i ja hem acabat. □

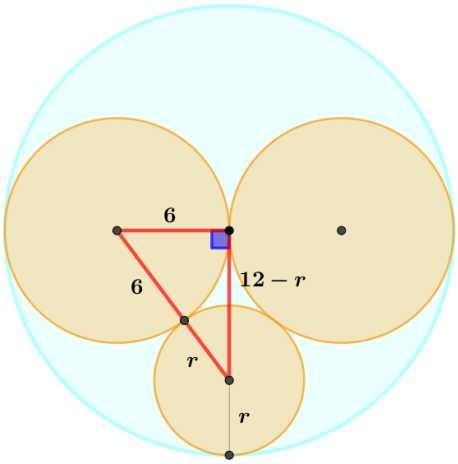
Problema 2.23 (Abril 20)**.** Un grup d'investigadores està fent recerca sobre un bacteri extremòfil (que pot viure en condicions extremes de temperatura, pressió...). En concret pretenen estudiar un organisme que viu en ambients molt àcids. Per això, preparen una placa de Petri amb una solució àcida (color blau clar). Després hi afegeixen el bacteri, (color taronja) per veure com es desenvolupa. Passat uns dies, observen el següent:



Hi ha dos cercles iguals, tangents entre ells, i tangents a la circumferència de la placa de Petri. A més a més, hi ha un altre cercle més petit, que és tangent als altres tres. Ara, volen mesurar el radi dels cercles, per saber la quantitat d'àrea que el bacteri ha pogut créixer. Si el radi del cercle blau és 12 cm, quants cm mesura el radi del cercle més petit?

Solució. Primer de tot, cal notar que el radi dels cercles iguals ha de ser la meitat que el cercle gran, ja que els dos junts ocupen el diàmetre gran. Per tant, aquests

tenen radi $6\,cm$. D'altra banda, com la figura és simètrica, l'angle que es forma al construir el següent triangle és un angle recte



Tal com s'avança a la figura, si diem r al radi del petit, que és el que volem descobrir, podem aplicar Pitàgores. Només ens cal tenir en compte que el catet llarg té longitud el radi del gran menys el radi del petit: $12 - r$. Aleshores, hem de resoldre

$$6^2 + (12 - r)^2 = (6 + r)^2$$

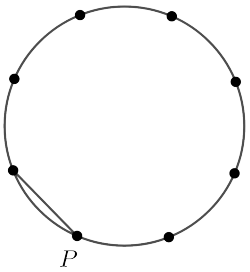
$$\Rightarrow 36 + 144 - 24r + r^2 = 36 + 12r + r^2$$

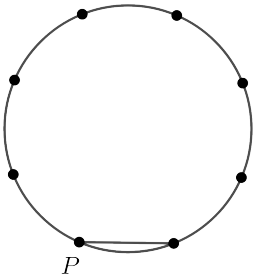
$$\Rightarrow 144 = 36r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{144}{36}\,cm$$

És a dir, el cercle petit té radi $\boxed{4\,cm}$ i hem acabat. □

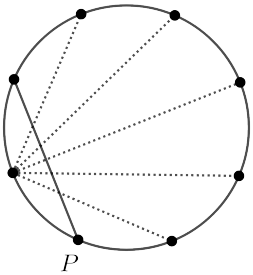
Problema 2.24 (Març 20)**.** El país *quadrat* és un petit país amb forma de quadrat, i té 8 ciutats diferents a la frontera. Acaben de descobrir el tren i pretenen comunicar les ciutats construint una via (no necessàriament recta) diferent per a cada parella de ciutats. Òbviament, les vies han d'anar per l'interior o la frontera, però sense passar per cap altra ciutat o intersecció ja existent. Si per a cada intersecció de vies (que no sigui una ciutat) posen un semàfor, quants en necessitaran com a mínim?

Solució 1. Observem que en realitat és el mateix col·locar els punts sobre un quadrat que sobre qualsevol polígon convex, o, per exemple, una circumferència. Si ens centrem en un punt P dels 8 punts, haurem de traçar una línia a cadascun dels altres punts. Per fer una línia als dos punts contigus, no haurem de fer cap intersecció:

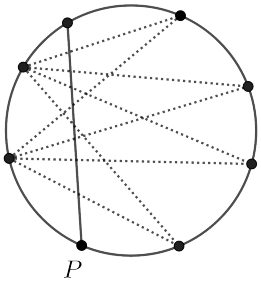




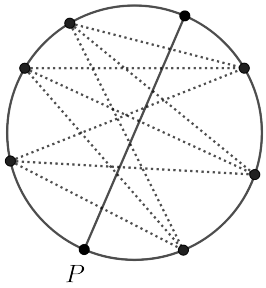
Com el dibuix és simètric, seguim analitzant què passa amb els punts de l'esquerra. En traçar una línia amb el següent punt, com a mínim crearem 5 interseccions:



Amb el següent punt, n'haurem de crear 8:



I per últim, amb el darrer punt, tindrem 9 interseccions com a mínim:

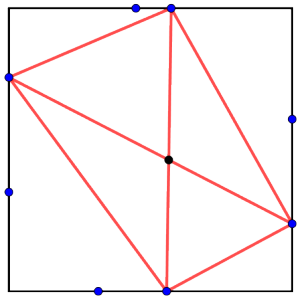


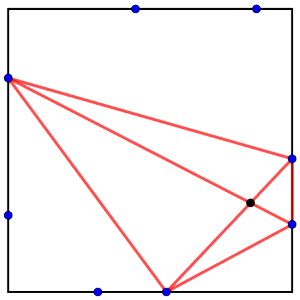
El nombre total d'interseccions per al punt P, són:

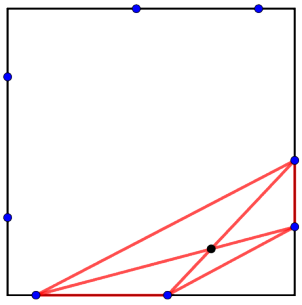
$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 9 = 35$$

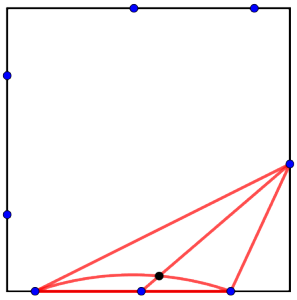
Per tant, les línies que surten de cada punt acumulen 35 punts d'intersecció, és a dir, $8 \cdot 35 = 280$ interseccions en total. Ara bé, cada intersecció l'hem comptada 4 cops en total, una per cada punt d'origen de les 2 línies que intersequen. Per tant, en total, hi hauran $\frac{280}{4} = \boxed{70}$ interseccions. □

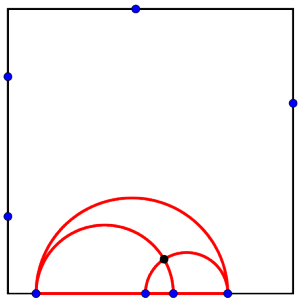
Solució 2. La primera observació clau és que la distribució de les ciutats no varia el resultat. Això és evident després de notar el següent. La segona observació és que per a cada 4 ciutats que triem, sempre hi haurà un punt d'intersecció mínim. En efecte, considera el següent dibuix.











Podem justificar millor, amb el teorema de Bolzano, que en efecte hi ha una intersecció. Tanmateix, en tot cas, el mínim és 1 per cada subconjunt de 4 ciutats (que sempre podem assolir, tal com es veu en les figures anteriors).

Aleshores, com la quantitat de maneres que podem triar 4 ciutats d'entre 8 és el número combinatori $\binom{8}{4} = 70$, i tenim una intersecció per a cada una d'aquestes tries, caldran $\boxed{70}$ semàfors.

□

3 2n Batxillerat

3.1 Curs 2021-2022

Problema 3.1 (Juny 22)**.** Diem que un nombre n és *estiuenc* si en escriure la representació decimal de $\frac{1}{n}$ tenim un nombre finit de decimals. Per exemple, $n = 20$ és estiuenc ja que $\frac{1}{20} = 0.05$, mentre que $n = 7$ ¡b¿no¡/b¿ és estiuenc ja que $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ i té infinits decimals periòdics.

Quants nombres entre 1 i 2022 són estiuencs?

Solució. Vegem primer que els nombres estiuencs són aquells que només tenen factors 2 i 5 en la seva descomposició i, després, els comptarem.

Notem que un nombre n té un nombre finit de decimals si, i només si, $\frac{10^k}{n}$ és un enter per a algun enter k (per exemple, prenent k la quanitat de decimals en qüestió). Per exemple, per $n = 20$, tenim $\frac{10^2}{20} = 10^2 \cdot 0.05 = 5$.

Aleshores, també tenim que $\frac{10^k}{n}$ és enter quan n només té factors 2 i 5, ja que $n \mid 10^k = 2^k \cdot 5^k$. Per tant, concloem que els nombres estiuencs són aquells que només tenen factors 2 i 5 en la seva descomposició.

Per comptar els nombres estiuencs entre 1 i 2022, podem simplement enumerar-los, amb la informació que acabem de trobar, segons la seva forma

- $n = 2^k \cdot 5^0$: $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{10} = 1024$, d'aquí en tenim 11
- $n = 2^k \cdot 5^1$: $2^0 \cdot 5, 2^1 \cdot 5, 2^2 \cdot 5, \ldots, 2^8 \cdot 5 = 1280$, d'aquí en tenim 9
- $n = 2^k \cdot 5^2$: $2^0 \cdot 5^2, 2^1 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 5^2, \ldots, 2^6 \cdot 5 = 1600$, d'aquí en tenim 7
- $n = 2^k \cdot 5^3$: $2^0 \cdot 5^3, 2^1 \cdot 5^3, 2^2 \cdot 5^3, 2^3 \cdot 5^3, 2^4 \cdot 5^3 = 2000$, d'aquí en tenim 5
- $n = 2^k \cdot 5^4$: $2^0 \cdot 5^4, 2^1 \cdot 5^4, = 1250$, d'aquí en tenim 2

Per la manera en què els hem enumerat, no hi ha cap repetició i, per mida, no n'hi pot haver amb exponent més gran. Tot plegat, la quantitat de nombres estiuencs cercada és $11 + 9 + 7 + 5 + 2 = \boxed{34}$.

□

Problema 3.2 (Maig 22)**.** La Yaiza està calculant l'arrel radical dels seus números preferits. L'arrel radical d'un nombre es calcula de la següent manera.

i) Es fa la suma dels dígits del nombre.

ii) Si el resultat és un sol dígit $(0, 1, 2, \ldots, 9)$ hem acabat. Si no, tornem a fer $i)$

Per exemple, l'arrel radical del número 4348 és

$$4+3+4+8=19 \longrightarrow 1+9=10 \longrightarrow 1+0=1 \quad \Longrightarrow \quad ar(4348)=1$$

Aleshores, la Zoe proposa a la Yaiza que calculi l'arrel radical dels seus dos números preferits, i que multipliqui els dos resultats.

$$Z = ar(3 \cdot 2^{2022}+1) \cdot ar(3 \cdot 2^{2022}-1)$$

Quant val $ar(Z)$?

Solució. Primer de tot, vegem que l'arrel radical d'un número és simplement el residu que deixa en dividir-lo per 9.

En efecte, notem que $10^n \equiv 1^n \equiv 1 \mod 9$, és a dir, que totes les potències de 10 donen residu 1 en dividir-se per 9. Per tant,

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \mod 9$$

És a dir, la suma de dígits dona el mateix residu mòdul 9 original. En particular, iterant la suma de dígits tenim que $N \equiv ar(N) \mod 9$. Com que a més és un sol dígit, l'arrel radical és precisament el residu que N deixa en dividir-lo per 9.

Amb això en ment, és clar que l'arrel radical és multiplicativa en el següent sentit

$$ar(M \cdot N) = ar(ar(M) \cdot ar(N))$$

Per tant, com

$$ar(Z) = ar(ar(3 \cdot 2^{2022}+1)ar(3 \cdot 2^{2022}-1))$$
$$\Longrightarrow ar(Z) = ar((3 \cdot 2^{2022}+1)(3 \cdot 2^{2022}-1)) = ar(9 \cdot 2^{2 \cdot 2022}-1)$$

I l'arrel radical d'un múltiple de 9 menys 1 és, precisament, 8. Per tant, el valor cercat és $\boxed{ar(Z)=8}$. □

Problema 3.3 (Abril 22)**.** Un museu té 50 sales numerades de l'1 al 50. Cada una té un interruptor que permet encendre o apagar el llum, segons si ja estava apagat o encès, respectivament.

Quan el museu tanca, inicialment, totes les llums estan apagades. Aleshores, un guàrdia de seguretat fa 50 rondes de vigilància, seguint aquest protocol:

i) A la primera ronda, prem tots els interruptors, encenent tots els llums.

ii) A la segona ronda, prem només els interruptors de les sales que tenen un número parell.

iii) A la tercera ronda, prem només els interruptors de les sales que tenen un número múltiple de tres.

$\vdots$

I així successivament fins fer la ronda número 50 on només premerà l'interruptor de l'última habitació. Quan ha acabat totes les rondes, quants llums queden encesos?

Solució 1. Veurem que els llums que queden encesos són els tenen un número quadrat perfecte. En primer lloc, cal notar que premerem l'interruptor d'una sala tants cops, com divisors (positius) tingui el número de sala. Per exemple, a la sala número 24 premerà l'interruptor quan passi les rondes $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$.

Aleshores, un llum quedarà encès si prem l'interruptor un nombre senar de vegades, és a dir, si el número de l'habitació té un nombre senar de divisors positius. Vegem que els únics números que tenen una quantitat senar de divisors són els quadrats perfectes.

En efecte, notem que si el nombre no és un quadrat perfecte, podem aparellar els divisors com $(d, n/d)$ amb $d < \sqrt{n}$. Clarament un d'ells és divisor de n si, i només si, l'altre ho és. Per tant, atès que venen per parelles, tindrem una quantitat parella de divisors. A més, notem que $d \neq n/d$, ja que $n \neq d^2$ per cap d.

Per contra, si el número és un quadrat perfecte, podem fer les mateixes parelles però ens quedarà penjat el divisor $\sqrt{n}$, ja que ens donaria la parella $(\sqrt{n}, n/\sqrt{n}) = (\sqrt{n}, \sqrt{n})$, i l'estaríem comptant per doble!

En resum, els números que tenen una quantitat senar de divisors són els quadrats perfectes, que en el nostre rang són: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$. Per tant, aquestes seran les sales que quedaran amb el llum encès, que són un total de $\boxed{7}$ sales. □

Solució 2. Alternativament, es pot veure que el nombre de divisors (positius) d'un nombre $n = {p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}\dots{p_r}^{a_r}$ és $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_r+1)$. Aquesta fórmula surt de considerar que qualsevol divisor de n serà de la forma ${p_1}^{b_1}{p_2}^{b_2}\dots{p_r}^{b_r}$, on tenim la restricció $0 \leq b_i \leq a_i$. Com els b_i són nombres enters, tenim $a_i + 1$ tries per a cada un d'ells, i fent el producte obtenim el nombre total de tries, és a dir, el nombre total de possibles divisors.

En qualsevol cas, si el nombre de divisors de n és senar, cal que cada factor $(a_i + 1)$ sigui senar, és a dir, cada a_i sigui parell. Aquesta és precisament la condició que n sigui un quadrat perfecte, i arribem a la mateixa conclusió. □

Problema 3.4 (Març 22)**.** En Jordi està provant de definir una nova operació, a la qual ha anomenat *diamant*. Funciona de la següent manera: donats dos enters a, b, retorna el valor: $a \diamond b = ab - 4(a+b) + 20$.

Ara, vol avaluar la següent expressió

$$1 \diamond (2 \diamond (3 \diamond (\cdots (2021 \diamond 2022) \cdots)))$$

Pots ajudar-lo a trobar-ne el valor?

Solució. L'observació clau és que l'operació diamant no és més que

$$a \diamond b = ab - 4(a+b) + 20 = (a-4)(b-4) + 4$$

En particular, es compleix per qualssevols enters a, b que

$$\begin{cases} a \diamond 4 = (a-4)(4-4) + 4 = 4 \\ 4 \diamond b = (4-4)(b-4) \ + 4 = 4 \end{cases}$$

En particular, com que en l'expressió apareix un 4, el resultat final serà també $\boxed{4}$.

Per veure-ho amb més detall, seguim els passos

$$1 \diamond (2 \diamond (3 \diamond (4 \diamond (\cdots (2021 \diamond 2022) \cdots))) = 1 \diamond (2 \diamond (3 \diamond (4 \diamond (...)))) =$$
$$= 1 \diamond (2 \diamond (3 \diamond 4)) = 1 \diamond (2 \diamond 4) = 1 \diamond 4 = 4$$

□

Problema 3.5 (Febrer 22)**.** La Míriam està jugant amb el seu cosí, en Gerard. S'adonen que, posant l'edat de la Míriam davant de l'edat del Gerard formen un número de quatre xifres que és un quadrat perfecte. Encara més, dintre de 31 anys, posant les edats en el mateix ordre també formarien un quadrat perfecte de quatre dígits.

Amb aquesta informació, quina és l'edat de la Míriam?

Nota: Per exemple, si la Míriam tingués 19 anys i en Gerard 34, formarien el número 1934.

Solució. Primer de tot, notem que ambdues edats inicials han de ser nombres de dues xifres. Si no, hauria de passar que la Míriam tingués 100 o més anys. Però llavors, passats els 29 anys següents, el Gerard passaria a tenir una edat de dues xifres, i en ajuntar-les no formarien un nombre de quatre xifres.

Aleshores, diguem M i G a les edats de cadascú. Per l'enunciat sabem que

$$\begin{cases} 100M + G = x^2 \\ 100(M+31) + (G+31) = y^2 \end{cases}$$

Operant i substituint la primera igualtat en la segona obtenim

$$100M + G + 3100 + 31 = y^2 \implies x^2 + 101 \cdot 31 = y^2 \implies 101 \cdot 31 = (y+x)(y-x)$$

On hem factoritzat la diferència de quadrats.

Ara bé, notem que 101 i 31 són ambdós nombres primers així que només tenim dos casos (notem que $y > x > 0$). En el primer cas

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 101 \cdot 31 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 1566 \\ x = 1565 \end{cases}$$

Que no té sentit ja que $100M + G = 1565^2 = 2449225$ no és de quatre xifres. Així que necessàriament en el segon cas

$$\begin{cases} y - x = 31 \\ y + x = 101 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 66 \\ x = 35 \end{cases}$$

Per tant, per trobar les edats hem de resoldre

$$100M + G = 35^2 = 1225$$

És a dir, que el Gerard té 25 anys i la Míriam, $\boxed{\text{12 anys}}$. □

Problema 3.6 (Gener 22)**.** L'Edu està organitzant una festa per celebrar cap d'any. Per això, ha comprat uns globus on es llegeix

Bon any 2022!

La Núria, com a bona matemàtica, li ha fet notar que l'exclamació al final del nombre pot confondre's amb un factorial. De fet, el factorial de 2022 és un nombre molt gran. Sense haver de calcular-lo, sabries dir amb quants **0** acaba el nombre $2022! = 2022 \cdot 2021 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$?

Solució. Per trobar el nombre de 0 finals, cal comptar quants 2 i 5's apareixen com a factors en el producte. En efecte, per cada $2 \cdot 5 = 10$ afegirem un 0 al resultat del factorial.

Ara bé, no ens cal comptar quants 2 i quants 5 tenim, sinó que només ens cal saber els 5. La raó és que que trobarem menys quantitat de factors 5 que 2's en tot el producte. Per tant, com que ens cal un de cada per afegir un 0 final, el limitant és la quantitat de 5's.

Per exemple, $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2^4 \cdot 5 \cdot 9 = 120$, hi tenim un 0 final ja que hi apareixen quatre factors 2, però només un factor 5.

Aleshores, per comptar el nombre de 5 que apareixen multiplicant al producte del factorial, notem que fins a 2022 hi ha

$\lfloor \frac{2022}{5} \rfloor = 404$ múltiples de 5, que són $5, 10, 15, 20, 25, \ldots, 2020$.

$\lfloor \frac{2022}{5^2} \rfloor = 80$ múltiples de 5^2, que són $25, 50, 75, \ldots 2000$.

$\lfloor \frac{2022}{5^3} \rfloor = 16$ múltiples de 5^3, que són $125, 250, \ldots, 2000$.

$\lfloor \frac{2022}{5^4} \rfloor = 3$ múltiples de 5^4, que són $625, 1250, 1875$.

I de 5^5 ja no hi ha cap múltiple, ja que passen de 2022.

Aleshores, cada múltiple de 5 ens aporta un factor. Seguidament, per cada múltiple de 5^2, ens aporten un factor més cada un (l'altre ja l'hem comptat amb els múltiples

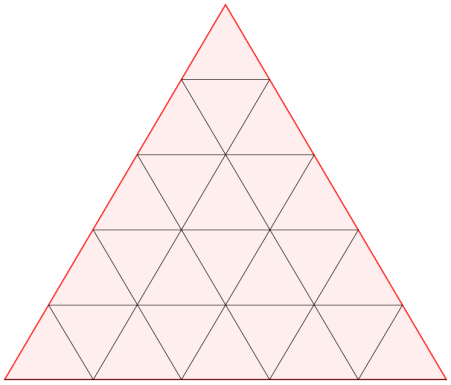
de 5). Així mateix, per cada múltiple de 5^3, tenim un factor més per cada un (els altres dos ja els hem comptat dins dels múltiples de 5 i dels múltiples de 5^2). Finalment, cada múltiple de 5^4 ens aporta un factor 5 més, pel mateix raonament.

En conclusió, el nombre de 5's que apareixen com a factor en el producte és la suma

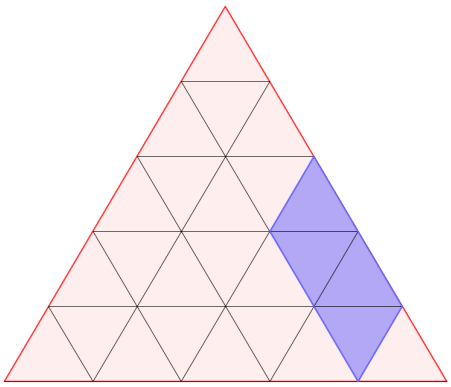
$$\lfloor \frac{2022}{5} \rfloor + \lfloor \frac{2022}{5^2} \rfloor + \lfloor \frac{2022}{5^3} \rfloor + \lfloor \frac{2022}{5^4} \rfloor = 404 + 80 + 16 + 3 = 503$$

Per tant, aquest és el nombre de factors 5 que apareixen en el producte 2022! i, com s'ha raonat, aquesta serà la quantitat de zeros finals: $\boxed{503}$. □

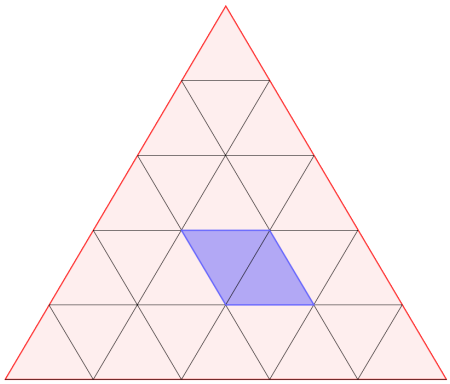
Problema 3.7 (Desembre 21)**.** La Clara està fent una projecte per dissenyar una ciutat del futur. Ha considerat una ciutat en forma de triangle equilàter, i l'ha dividit en una graella en forma de triangles equilàters més petits, com es pot apreciar a la figura.



Ara, vol posar-hi l'ajuntament, que ha de ser un edifici en forma de paral·lelogram i que respecti els límits de la graella. Per exemple, posant l'ajuntament en color blau, podria ser:



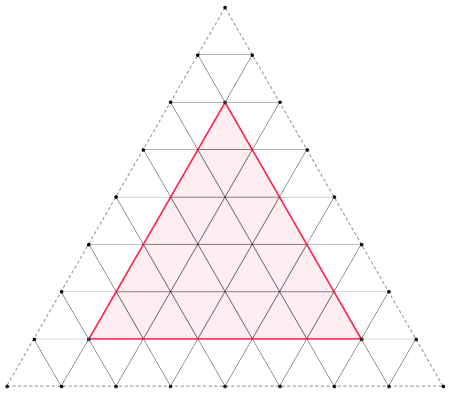
o també



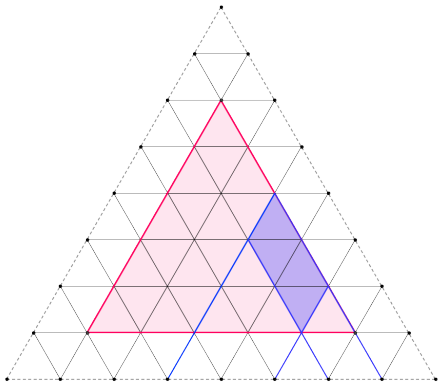
De quantes maneres pot triar una ubicació per a l'ajuntament? És a dir, quants paral·lelograms hi ha en la graella?

Solució. Cada paral·lelogram té tres possibles orientacions, apuntant a un dels tres vèrtexs del triangle. Per simetria, el nombre de paral·lelograms en cada direcció serà el mateix, per tant, comptarem només els que apunten dalt-abaix.

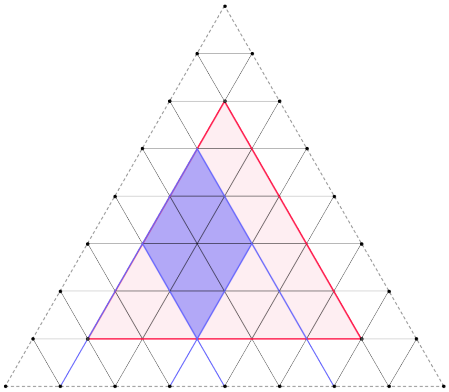
Per fer-ho, afegim una fila més als costats de la graella del triangle equilàter original.



Aleshores, qualsevol paral·lelogram, si en prolonguem també els seus costats, tallarà aquesta última fila. Per exemple,



o també



Això ens resulta útil, perquè podem establir una bijecció entre cada paral·lelogram i els punts on tallen els seus costats a aquesta última fila. En efecte, aquests 4 punts de tall són únics, i determinen inequívocament el paral·lelogram.

Per tant, dels 7 punts (els extrems no ens serveixen) del costat inferior que hem afegit a la graella, n'hem de triar 4, i això ho podem fer de $\binom{7}{4}$ maneres. Cada una d'aquestes tries ens determinarà un para l·lelogram diferent.

En conclusió, multiplicant per les 3 possibles orientacions, tenim que el nombre total de paral·lelograms en la graella és de $\boxed{3 \cdot \binom{7}{4} = 105}$. □

Problema 3.8 (Novembre 21)**.** En Pol està estudiant el moviment d'una partícula, i ha trobat que la seva posició està descrita per un polinomi de segon grau $A(t) = t^2 + a_1 t + a_0$. A més, ha observat que la partícula ha estat en la mateixa posició en els instants $t = 0$ i $t = 1$, és a dir, se satisfà que $A(0) = A(1)$.

Quant val com a màxim el producte de les arrels d'aquest polinomi $A(t)$?

Solució. Usarem les relacions de Cardano-Viète. Si α, β són les arrels de $A(t)$, aleshores

$$A(t) = (t-\alpha)(t-\beta) = t^2 - (\alpha+\beta)t + \alpha\cdot\beta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -a_1 = \alpha+\beta \\ a_0 = \alpha\cdot\beta \end{cases}$$

A més a més, $A(0) = a_0 = \alpha\cdot\beta$. Per tant, podem reescriure la condició de l'enunciat com

$$1 + a_1 + a_0 = \alpha\cdot\beta \quad \Longrightarrow \quad 1 - (\alpha+\beta) + \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta \quad \Longrightarrow \quad 1 = \alpha+\beta$$

Per tant, hem trobat que la suma de les arrels és 1. Llavors, usant la desigualtat entre mitjanes aritmètica i geomètrica

$$\alpha\cdot\beta \leq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

I el màxim s'assoleix en el cas d'igualtat quan $\alpha = \beta = 1/2$. En conclusió, el màxim valor que assoleix el producte de les arrels és $\boxed{1/4}$.

Nota: Una manera alternativa de provar la desigualtat és estudiant la funció $y = \alpha\cdot(1-\alpha) = \alpha\cdot\beta$. Aquesta és una paràbola invertida, i el seu valor màxim es troba en $\alpha = \dfrac{1}{2} \implies \beta = \dfrac{1}{2}$, on val precisament $\alpha\cdot\beta = \dfrac{1}{4}$. □

Problema 3.9 (Octubre 21)**.** En Vidal i la Valèria estan esperant el tren, que torna a fer tard. Per entretenir-se, en Vidal proposa a la Valèria que endevini dos números **enters positius** que s'acaba de pensar: x i y. Ara bé, només li dona la següent informació

$$\begin{cases} x\cdot y = 2^5\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11^2 \\ \mathrm{mcd}(x,y) = 20 \end{cases}$$

És a dir, li diu el resultat de multiplicar els dos números, i que el màxim comú divisor dels dos és 20. Amb això, quants números diferents podria ser x?

Nota: Recorda que el màxim comú divisor de dos números és el número més gran que els divideix als dos.

Solució. Que el màxim comú divisor dels dos nombres sigui 20 vol dir que els podem

escriure com

$$x = 20x' \qquad y = 20y'$$

on x' i y' no tenen cap factor en comú.

D'altra banda, tenim que per la primera informació

$$\begin{cases} x \cdot y = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \\ x \cdot y = 20x' \cdot 20y' = 2^4 \cdot 5^2 \cdot x' \cdot y' \end{cases} \implies x' \cdot y' = 2 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2$$

Ara bé, sabem que x' i y' no tenen cap factor en comú. En conseqüència, per definir-los hem de repartir els factors $2, 3^4, 7, 11^2$ a un, i només un, dels dos nombres.

Per exemple, podríem repartir-los com

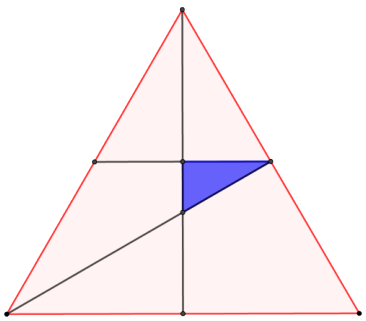
$$\begin{cases} x' = 2 \cdot 3^4 \\ y' = 7 \cdot 11^2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x' = 3^4 \cdot 11^2 \\ y' = 2 \cdot 7 \end{cases}$$

Així doncs, comptem de quantes maneres podem repartir els factors. Cada un dels 4 factors té dues possibilitats, estar en x' o estar en y'. Per tant, el nombre total de maneres serà $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

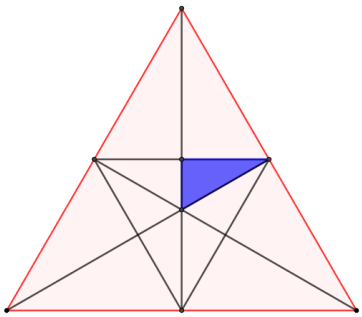
En conclusió, x' podria ser 16 nombres diferents, i en conseqüència $x = 20x'$ també té $\boxed{16}$ possibilitats. □

Problema 3.10 (Setembre 21)**.** Els alumnes de batxillerat acaben de començar el curs, i al seu nou professor de matemàtiques li encanta la geometria. Per això, els proposa el següent problema:

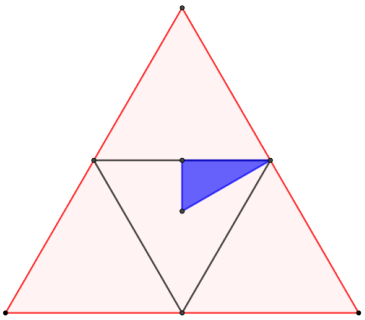
El triangle equilàter vermell té àrea 1. A més, hi marquem els punts mitjos dels costats i unim les línies com en la figura. Si el triangle petit blau té àrea $1/x$, quant val x?



Solució 1. Primer de tot, tracem totes les següents línies



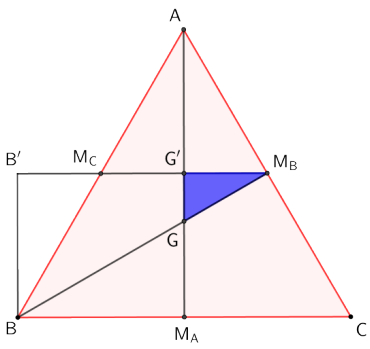
Aleshores és evident que els 4 triangles mitjans que apareixen tenen la mateixa àrea (els seus costats són la meitat de l'original). Per tant, els triangles mitjans tenen àrea $1/4$:



Ara, ens fixem en el triangle mitjà del centre, que conté el triangle blau. Podem veure que amb totes les línies traçades, els 6 triangles petits que divideixen el triangle mitjà tenen la mateixa àrea per simetria.

Per tant, el triangle blau té àrea $1/6 \cdot 1/4 = 1/24$, i el valor demanat és $\boxed{x = 24}$. □

Solució 2. Si tracem totes les següents línies i posem noms als punts



Aleshores, com que M_C és el punt mig de AB, i tots els costats corresponents són paral·lels, els triangles $\Delta BB'M_C$ i $\Delta AG'M_C$ són iguals.

En particular, $B'M_C = M_CG' = G'M_B$ o també $B'M_B = 3G'M_B$. Llavors per Tales des de M_B amb les rectes paral·leles BB' i GG', tenim

$$GG' = BB' \cdot \frac{G'M_B}{B'M_B} = \frac{1}{3}BB'$$

Com que l'àrea del triangle vermell gran és 1, deduïm

$$[Area] = 1 = \frac{1}{2}BC \cdot AM_A = \frac{1}{2}(4 \cdot G'M_B) \cdot (2 \cdot BB') =$$

$$= \frac{1}{2}(4 \cdot G'M_B) \cdot (2 \cdot 3 \cdot GG') = 24 \cdot \frac{1}{2}G'M_B \cdot GG' = 24 \cdot [Area]$$

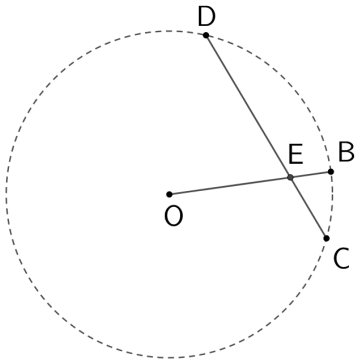
Per tant, l'àrea blava val

$$\Longrightarrow \quad [Area] = [Area] \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

I el valor cercat és $\boxed{x = 24}$. □

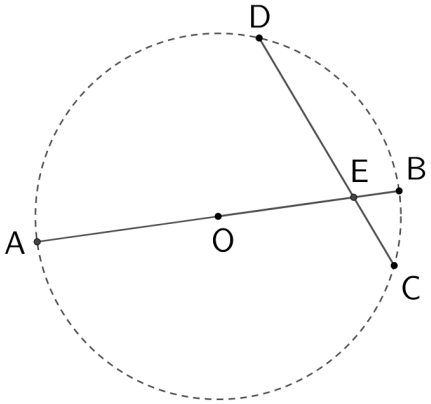
3.2 Curs 2020-2021

Problema 3.11 (Juny 21)**.** Tracem una circumferència de centre O. A continuació, hi dibuixem un radi OB i una corda CD, que es tallen en un punt E.

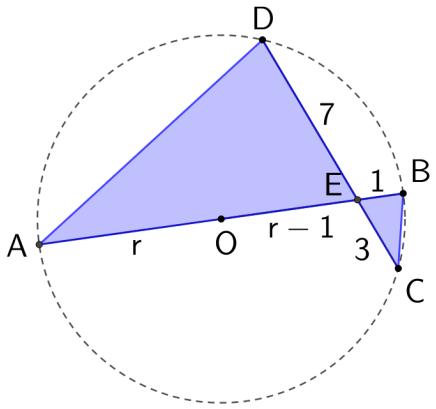


Si resulta que $BE = 1$, que $CE = 3$ i que $DE = 7$, quant mesura el radi de la circumferència en qüestió?

Solució. Si dibuixem el punt A, diametralment oposat a B,



Tenim que els triangles ΔADE i ΔCBE són semblants (potència d'un punt)



per tant, dient r al radi del cercle tenim la igualtat

$$(r + r - 1) \cdot 1 = 3 \cdot 7 \implies r = \frac{21 + 1}{2}$$

És a dir, el radi del cercle val $\boxed{r = 11}$. □

Problema 3.12 (Maig 21)**.** En un congrés hi ha representants de 32 països diferents. Per crear una comissió de treball, s'han d'escollir alguns representants (mínim un, màxim tots els 32), i dintre d'aquests un president o presidenta.

Si W és el nombre de maneres diferents en què es pot crear aquesta comissió, quant val $\log_2 W$?

Solució 1. Resoldrem el cas general, amb n representants. Cal notar que és equivalent triar primer el president/a i després la resta de components de la comissió. Triar el president/a podem fer-ho de $\binom{n}{1} = n$ maneres.

Per a la resta de persones, hem d'escollir un subconjunt de les $n-1$ restants. Com que aquest subconjunt pot ser qualsevol (en particular buit, ja que ja tenim el president/a com a part de la comissió), en tenim exactament 2^{n-1} . Això ho podem justificar veient que a l'hora de construir un subconjunt, cada una de les persones pot ser-hi o no ser-hi. Multiplicant aquestes 2 opcions per a les $n-1$ persones obtenim el resultat presentat.

Tot plegat, les maneres que tenim de crear la comissió és el producte de maneres de triar president/a i les maneres de triar el subconjunt restant

$$W = n\,2^{n-1}$$

Així que amb les dades del problema, el valor demanat és

$$W = 32 \cdot 2^{32-1} = 2^{36} \quad \Longrightarrow \boxed{\log_2 W = 36}$$

□

Solució 2. Resoldrem el cas general, amb n representants. Si la comissió que creem és de k persones, i d'entre aquestes k triem president/a, les maneres en què podem fer-ho són:

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{1} = k\binom{n}{k}$$

Aleshores, com que k pot ser qualsevol entre 1 i n, fent la suma obtindrem les maneres totals

$$W = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

Per sumar això, multipliquem i dividim per n, de manera que podrem reescriure cada terme com

$$n\frac{k}{n}\binom{n}{k} = n\frac{k}{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Així que substituint i canviant l'índex

$$W = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l}$$

veiem que això és precisament la suma dels nombres combinatoris a la fila $n-1$ del triangle de Pascal. Per tant,

$$W = n\, 2^{n-1}$$

Finalment, per a les dades concretes del problema, posant $n = 32 = 2^5$ tenim

$$W = 2^5\, 2^{2^5-1} = 2^{5+2^5-1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\log_2 W = 5 + 2^5 - 1 = 36}$$

i aquest és el valor demanat. □

Solució 3. Procedim com en la solució anterior, però avaluarem la suma d'una forma diferent. Concretament, notem que si fem la derivada de la següent expressió resulta

$$((1+x)^n)' = n\,(1+x)^{n-1}$$

Ara bé, desenvolupant primer el binomi de Newton, podríem obtenir l'expressió per a la mateixa derivada com

$$((1+x)^n)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

on a l'últim pas hem cancel·lat el terme per a $k = 0$, que s'anul·la.

En particular, posant $x = 1$ en la igualtat trobada tenim

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n\,(1+x)^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = W = n\, 2^{n-1}$$

Exactament com havíem obtingut en les altres solucions. Per tant, de nou amb les dades del problema tenim

$$W = 2^5\, 2^{2^5-1} = 2^{5+2^5-1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\log_2 W = 5 + 2^5 - 1 = 36}$$

□

Problema 3.13 (Abril 21)**.** L'Izan i el Josep estan parlant sobre els seus polinomis

preferits. L'Izan li proposa que endevini el seu, així que li dona la següent pista:

– Els coeficients del meu polinomi preferit $P(x)$ són enters no negatius $(0, 1, 2, 3, \ldots)$, i si substitueixo $x = 9$ dona el valor $P(9) = 119881$.

Però el Josep li respon:

– Amb això no en tinc suficient per trobar-lo!

Així que l'Izan afegeix:

– Tens raó, se m'ha oblidat dir que $P(1) = 9$.

Ara sí, el Josep aconsegueix descobrir el polinomi. Quin és el coeficient en el terme de grau 2 d'aquest polinomi?

Solució 1. Primer de tot, cal notar que $P(1) = 9$ és la suma de tots els coeficients del polinomi. Com que aquests són enters no negatius, ja sabem que seran com a molt 9. En concret, els coeficients poden ser $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Ara trobarem els coeficients del polinomi, fitant-lo. Per això, recordem que si el polinomi és $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, aleshores quan substituïm $x = 9$ tindrem

$$119881 = P(9) = a_n \cdot 9^n + a_{n-1} \cdot 9^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 9 + a_0$$

Llavors, provant podem veure que si hi hagués terme de grau 6 ens passaríem

$$9^6 = 531441 > P(9)$$

i en canvi ens cal posar un terme de grau 5 ja que amb grau 4 no en tindríem suficient

$$9 \cdot 9^4 = 59049 < P(9)$$

Aleshores, sabem que hi ha terme de grau 5, ara per trobar-ne el coeficient notem

$$3 \cdot 9^5 = 177147 > P(9) > 118098 = 2 \cdot 9^5$$

Per tant, ja sabem que el polinomi comença per

$$P(x) = 2x^5 + \ldots$$

Notem que no podria començar per $P(x) = 1 \cdot x^5 + \ldots$, ja que de nou no arribaríem

$$1 \cdot 9^5 + 8 \cdot 9^4 = 111537 < P(9)$$

Així doncs, podem seguir aquest procediment. Veiem que no pot haver-hi cap terme de grau 4 ja que

$$P(9) < 124659 = 2 \cdot 9^5 + 9^4$$

Passem a termes de grau 3, i vegem que ens cal tenir-ne, ja que amb graus inferiors no arribaríem

$$2 \cdot 9^5 + 7 \cdot 9^2 = 118665 < P(9)$$

Concretament, per trobar el coeficient del terme de grau 3 fitem entre els valors

$$2 \cdot 9^5 + 3 \cdot 9^3 = 120285 > P(9) > 119556 = 2 \cdot 9^5 + 2 \cdot 9^3$$

Així que el polinomi serà

$$P(x) = 2x^5 + 2x^3 + \ldots$$

Repetint aquest procés de fitar per als termes de grau $2, 1$ i 0 obtindríem finalment

$$P(x) = 2x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 1$$

Efectivament, aquest polinomi compleix

$$P(9) = 2 \cdot 9^5 + 2 \cdot 9^3 + 4 \cdot 9^2 + 1 = 119881$$

$$P(1) = 2 + 2 + 4 + 1 = 9$$

Finalment, la resposta demanada és el coeficient en el terme de grau 2, que és $\boxed{4}$. □

Solució 2. Ara, la manera elegant de resoldre el problema és notar el següent. Com ja s'ha dit, el fet que $P(1) = 9$ i que els coeficients siguin enters no negatius implica que tots els coeficients han de ser entre $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Podem descartar ràpid el cas en què hi hagués un coeficient 9, ja que llavors $P(x) = 9x^k$, però $P(9) = 119881$ no és una potència de 9.

Aleshores, trobar els coeficients del polinomi a partir de $P(9) = 119881$ és equivalent a trobar la representació de 119881 en base 9, ja que hem justificat que els coeficients

són entre 0 i 8. Així trobem directament la resposta ja que

$$119881 = 202401_{(9} \quad \Rightarrow \quad P(x) = 2x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 1$$

Així doncs, aquest problema pot usar-se com a truc matemàtic, on hem determinat un polinomi a coeficients enters no negatius sabent únicament $P(1)$ i $P(P(1))$. $\square$

Problema 3.14 (Març 21)**.** L'Abel escriu tres números a la llibreta:

$$A = 20^{1176} - 1 \qquad B = 20^{525} - 1 \qquad C = 20^n - 1$$

amb n un nombre natural.

Llavors, s'adona que C és el màxim comú divisor d'A i B, és a dir, que $C = \text{mcd}(A, B)$. Quant val n?

Solució 1. Anem a veure que

$$C = \text{mcd}(20^{1176} - 1, 20^{525} - 1) = 20^{21} - 1$$

Per això, notem el següent, atès que

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a - b, b)$$

aleshores deduïm

$$\text{mcd}(20^x - 1, 20^y - 1) = \text{mcd}(20^x - 1 - 20^y + 1, 20^y - 1) = \text{mcd}(20^y(20^{x-y} - 1), 20^y - 1)$$

Ara, és evident que dos nombres consecutius no poden tenir cap factor en comú

$$\text{mcd}(20^y, 20^y - 1) = \text{mcd}(20^y, 1) = 1$$

Per tant, en la igualtat anterior podem cancel·lar el factor 20^y al terme de l'esquerra

$$\text{mcd}(20^x - 1, 20^y - 1) = \text{mcd}(20^{x-y} - 1, 20^y - 1)$$

El que hem aconseguit en aquest procés és reduir un dels exponents. Podem repetir aquest procés, de manera semblant a com es duu a terme l'algorisme d'Euclides.

En el nostre cas particular, el que obtindrem són les igualtats

$$\begin{aligned} C &= \mathrm{mcd}(20^{1176}-1, 20^{525}-1) \\ &= \mathrm{mcd}(20^{651}-1, 20^{525}-1) \\ &= \mathrm{mcd}(20^{126}-1, 20^{525}-1) \\ &\ \ \vdots \\ &= \mathrm{mcd}(20^{126}-1, 20^{147}-1) \\ &= \mathrm{mcd}(20^{126}-1, 20^{21}-1) \\ &\ \ \vdots \\ &= \mathrm{mcd}(20^{21}-1, 20^{21}-1) = 20^{21}-1 \end{aligned}$$

En conseqüència, el valor demanat és $\boxed{n = 21}$. □

Solució 2. Aquest problema es pot resoldre de manera immediata usant la observació mencionada

$$\mathrm{mcd}(a^m - 1, a^n - 1) = \mathrm{mcd}(a^{m-n} - 1, a^n - 1)$$

ja que això ens permet aplicar l'algorisme d'Euclides als exponents, de manera que

$$\mathrm{mcd}(a^m - 1, a^n - 1) = \mathrm{mcd}(a^{\mathrm{mcd}(m,n)} - 1, a^{\mathrm{mcd}(m,n)} - 1) = a^{\mathrm{mcd}(m,n)} - 1$$

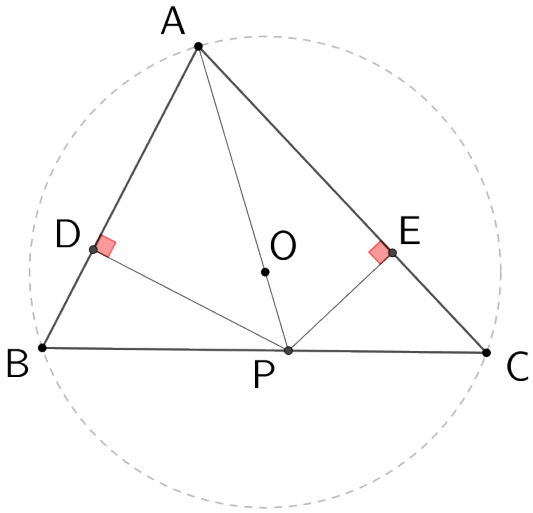
En el nostre problema concret

$$C = \mathrm{mcd}(20^{1176} - 1, 20^{575} - 1) = 20^{\mathrm{mcd}(1176,525)} - 1 = 20^{21} - 1$$

□

Problema 3.15 (Febrer 21)**.** En un triangle ABC, sabem que $AB = 10$. Ara, denotem per O el seu circumcentre i tracem la recta AO, que talla el costat BC en el punt P.

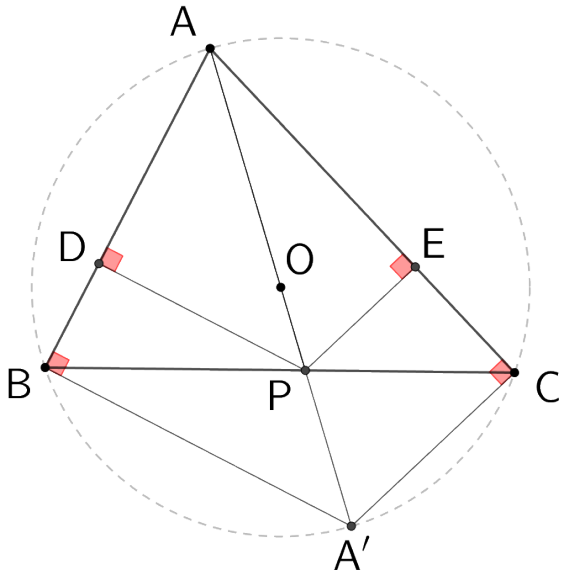
Des de P tirem perpendiculars als costats AB i AC, que tallen en els punts D i E, respectivament. Si $BD = CE$, quant mesura el costat AC?



Nota: El circumcentre d'un triangle és el centre de la circumferència que passa pels seus vèrtexs.

Solució. Vegem que perquè $BD = CE$ cal que el triangle ABC sigui isòsceles. Per tant, veurem que $AC = AB = 10$.

Si allarguem AP fins que talli la circumferència en A', tindrem un diàmetre.



Per tant, trobem que els angles $\angle ABA' = \angle ACA' = 90°$ són rectes. En particular, veiem que les rectes DP i BA' són paral·leles. Per tant, podem aplicar el teorema

de Tales per obtenir la següent relació

$$\frac{BD}{PA'} = \frac{AB}{AA'}$$

Ara bé, també podem aplicar Tales a l'altre costat, amb les rectes EP i CA', que dona la relació

$$\frac{CE}{PA'} = \frac{AC}{AA'}$$

I si dividim aquestes dues igualtats que acabem de trobar, tenim

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

Com que l'enunciat ens diu que BD i CE mesuren el mateix, aleshores concloem que AB i AC també mesuren el mateix. És a dir, el costat demanat mesura $\boxed{AC = 10}$.

□

Problema 3.16 (Gener 21)**.** En Joan i la Sònia estan estudiant el número 2021. En Joan acaba de veure que 2021 es pot expressar com a **diferència de dos quadrats de nombres enters**:

$$2021 = 2025 - 4 = 45^2 - 2^2$$

Tanmateix, la Sònia li diu que això no és gaire especial i que, de fet, passa molt sovint.

Quants nombres naturals entre 1 i 2021, ambdós inclosos, tenen aquesta propietat?

Solució. Anem a veure que un nombre natural n es pot expressar com a diferència de dos quadrats enters si, i només si, és de la forma $4k$ o $4k+1$ o bé $4k+3$. És a dir, no es podrà quan sigui de la forma $4k+2$.

Primer de tot, mostrem com construir els casos en que sí es pot:

Cas $n = 4k+1$ Podem fer servir la següent construcció

$$(2k+1)^2 - (2k)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 = 4k + 1$$

Cas $n = 4k+3$ Podem fer servir la següent construcció

$$(2k+2)^2 - (2k+1)^2 = 4k^2 + 8k + 4 - 4k^2 - 4k - 1 = 4k + 3$$

Cas $n = 4k$ Aquí hem de vigilar, ja que hem de distingir si k és parell o bé imparell, així que tenim dos subcasos que podem construir com

$$\begin{cases} \text{k parell} & \implies k = 2l \implies (2l+1)^2 - (2l-1)^2 = 4l^2 + 4l + 1 - 4l^2 + 4l - 1 = 8l = 4k \\ \text{k imparell} & \implies k = 2l+1 \implies (2l+2)^2 - (2l)^2 = 4l^2 + 8l + 4 - 4l^2 = 8l + 4 = 4k \end{cases}$$

Per tant, ara només ens falta demostrar quan **no** és possible

Cas $n = 4k + 2$ Per veure que això no és possible, veiem què hauria de passar perquè és complís. Si existissin a, b enters tals que

$$4k + 2 = a^2 - b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(2k+1) = (a-b)(a+b)$$

tindríem que exactament un dels nombres $a - b$ i $a + b$ seria parell, i l'altre seria imparell. Ara bé, això és impossible, ja que o els dos són parells o els dos són imparells.

$$2 \mid a + b \quad \Leftrightarrow \quad 2 \mid a + b - 2b = a - b$$

Per tant, hem arribat a contradicció i aquest cas no és possible.

Aleshores, la quantitat que cerquem serà 2021 menys la quantitat de números de la forma $4k + 2$ menors que 2021. Aquests números són precisament:

$$\begin{aligned} 2 &= 4 \cdot 0 + 2 \\ 6 &= 4 \cdot 1 + 2 \\ 10 &= 4 \cdot 2 + 2 \\ 14 &= 4 \cdot 3 + 2 \\ &\vdots \\ 2018 &= 4 \cdot 504 + 2 \end{aligned}$$

I llavors és evident que aquests en són 505. Per tant, podem concloure que la quantitat de números que es poden expressar com a diferència de quadrats d'enters és $2021 - 505 = \boxed{1516}$. □

Problema 3.17 (Desembre 20)**.** En una loteria benèfica es reparteixen 15 premis: un d'1 euro, un de 2 euros... fins un de 15 euros.

Un cop fet el sorteig tothom passa a recollir el seu premi, excepte una persona que no

es presenta. Aleshores, es decideix que els diners del premi no recollit se'ls quedarà l'organització.

Si la mitjana dels 14 premis que sí que s'han recollit és un nombre enter, quants euros valia el premi que s'ha quedat l'organització?

Solució. Farem la demostració pel cas general, on n és un nombre imparell major que 1. Primer de tot, notem que la suma de tots els premis és

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

I si denotem per k el valor del premi no recollit, aleshores la mitjana dels $n-1$ premis restants serà

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - k}{n-1}$$

Encara més, com que n és imparell $\frac{n+1}{2}$ és enter, i si els restem aquest valor també serà un nombre enter

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - k}{n-1} - \frac{n+1}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n+1)}{2} - k}{(n-1)} = \frac{n+1-2k}{2(n-1)} \in \mathbb{Z}$$

Ara bé, tenim que $1 \leq k \leq n$, així que tenim la següent desigualtat

$$\begin{cases} 1 \leq k \implies n+1-2k \leq n-1 \\ k \leq n \implies n+1-2k \geq 1-n \end{cases} \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{n+1-2k}{2(n-1)} \leq \frac{1}{2}$$

Per tant, com que és enter, aquest quocient ha de ser 0, i això només pot passar si

$$n+1-2k = 0 \iff k = \frac{n+1}{2}$$

En el nostre cas, quan $n = 15$ això significa que el premi no recollit val $\frac{15+1}{2} =$ $\boxed{8 \text{ euros}}$. □

Problema 3.18 (Novembre 20)**.** Triem aleatòriament dos reals x, y de manera que $0 < x < 5$ i $0 < y < 5$. Quina probabilitat hi ha que puguem formar un triangle de costats $4, x, y$?

Nota: Recorda que tres nombres positius x, y, z formen un triangle si, i només si, se

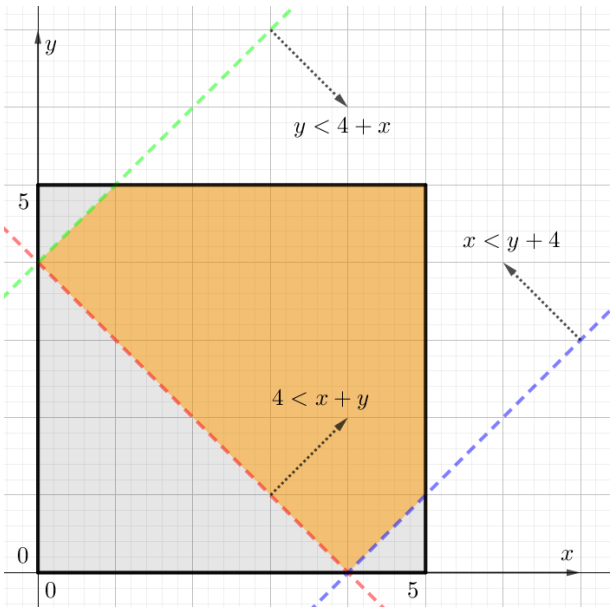
satisfan les tres desigualtats triangulars

$$x < y + z \qquad y < z + x \qquad z < x + y$$

Solució. La clau està en representar gràficament les desigualtats. Tenim que amb les condicions de l'enunciat s'han de satisfer les següents desigualtats

$$\begin{cases} 0 < x < 5 \\ 0 < y < 5 \\ 4 < x + y \\ x < y + 4 \\ y < 4 + x \end{cases}$$

Llavors representem aquesta regió en el pla XY, fixant-nos en el quadrat amb $0 < x < 5$, $0 < y < 5$. Cada desigualtat divideix el pla en dues regions, i quedant-nos amb l'adient, obtenim una regió tancada (la de color taronja)



La probabilitat serà llavors l'àrea taronja (casos favorables, se satisfan les desigualtats), dividida per l'àrea del quadrat (tots els casos).

L'àrea taronja és simplement

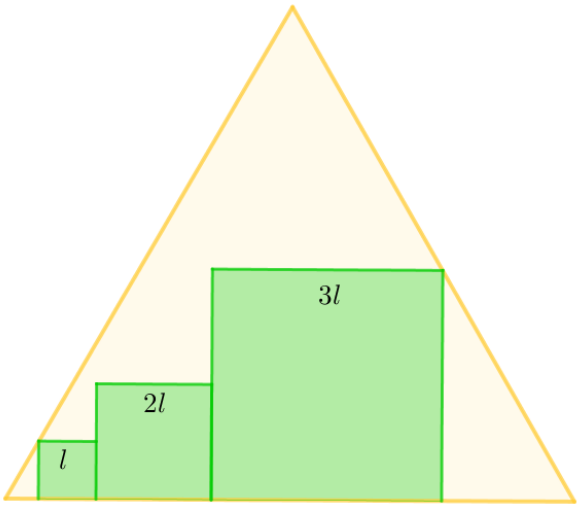
$$A_{taronja} = [\text{quadrat}] - [\text{triangle gran}] - 2 \cdot [\text{triangles petits}] = 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 16$$

Així que la probabilitat demanada a l'enunciat serà

$$p = \frac{A_{taronja}}{A_{quadrat}} = \boxed{\frac{16}{25}}$$

□

Problema 3.19 (Octubre 20)**.** En un triangle equilàter, hi encabim tres quadrats tal com s'indica a la figura, i els costats dels quadrats són $l, 2l$ i $3l$ per a un cert l real positiu.

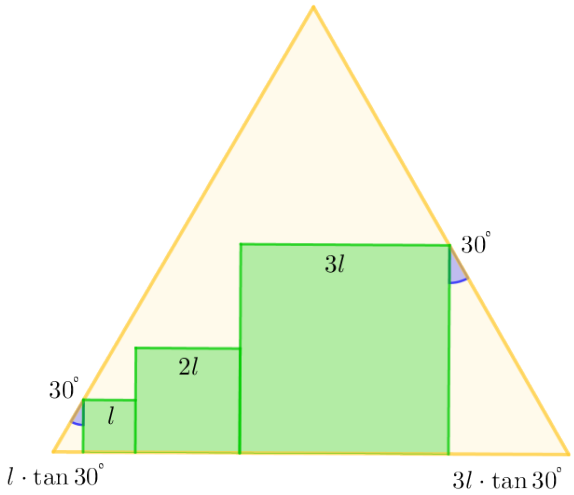


Calculem la divisió:

$$\frac{\text{àrea total del triangle equilàter}}{\text{àrea dels quadrats}}$$

i l'expressem en la forma $\dfrac{a+b\sqrt{3}}{c}$ (amb a, b, c naturals sense cap factor comú). Quant val b?

Solució. Primer de tot trobarem la longitud del costat del triangle equilàter. Per a això, notem que en els dos triangles que ens apareixen als costats dels quadrats tenen angles $30° - 60° - 90°$



En particular, amb un càlcul senzill de trigonometria podem trobar la longitud dels segments que desconeixem. En total, la base del triangle fa

$$l\tan 30° + l + 2l + 3l + 3l\tan 30° = l\Big(6 + \frac{4}{\sqrt{3}}\Big)$$

Llavors, com que l'àrea d'un triangle equilàter de costat c és $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$, substituint la longitud del costat que acabem de trobar tenim que la proporció cercada és

$$\frac{\text{àrea total del triangle equilàter}}{\text{àrea dels quadrats}} = \frac{\frac{l^2\left(6+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{4}}{l^2 + (2l)^2 + (3l)^2}$$

Ara només és qüestió de netejar l'expressió, cancel·lant les l^2 i operant

$$\frac{l^2\big(6 + \frac{4}{\sqrt{3}}\big)^2\sqrt{3}}{l^2\,14\cdot 4} = \frac{(3\sqrt{3}+2)^2}{14\sqrt{3}} = \frac{31 + 12\sqrt{3}}{14\sqrt{3}}$$

Per últim, racionalitzem el denominador multiplicant per $\sqrt{3}$

$$\frac{31\sqrt{3} + 12\cdot 3}{14\cdot 3} = \frac{36 + 31\sqrt{3}}{42}$$

En conclusió, $\boxed{b = 31}$ i hem acabat. □

Problema 3.20 (Setembre 20)**.** Siguin a, b les dues arrels distintes del polinomi

$p(x) = x^2 + 6x + 18$. És a dir,

$$a^2 + 6a + 18 = 0 \quad ; \quad b^2 + 6b + 18 = 0$$

Sense trobar a, b explícitament, quin és el valor $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$?

Solució. Com que a, b són les arrels del polinomi $p(x) = x^2+6x+18$, podem escriure $p(x) = (x-a)(x-b)$. Llavors per les relacions de Cardano-Viète.

$$(x-a)(x-b) = x^2+6x+18 \implies x^2-(a+b)x+ab = x^2+6x+18 \implies \begin{cases} a+b = -6 \\ ab = 18 \end{cases}$$

Un cop conegudes aquestes quantitats podem dividir la primera igualtat per a o per b i obtenim

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{-6}{a} \quad ; \quad \frac{a}{b} + 1 = \frac{-6}{b}$$

Per tant, sumant aquestes dues expressions

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = -6\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 2$$

Per trobar el valor d'aquest últim parèntesis, dividim les igualtats que hem trobat amb Cardano

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{-6}{18} \implies \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{-6}{18}$$

Aleshores, tot plegat tenim que

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = -6\left(\frac{-6}{18}\right) - 2 \implies \boxed{\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 0}$$

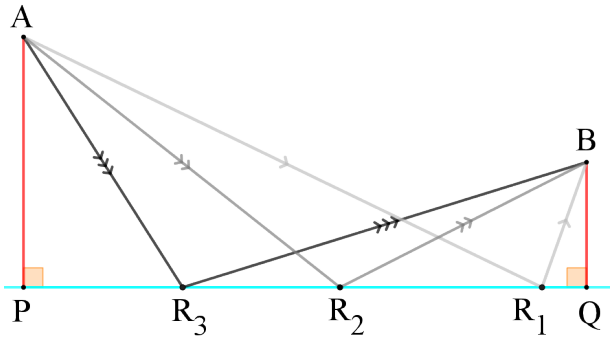
i aquest és el valor que se'ns demana trobar. □

3.3 Curs 2019-2020

Problema 3.21 (Juny 20)**.** Una persona i el seu cavall es troben a la ciutat A i pretenen anar fins la ciutat B. No obstant, fa molta calor, i l'amo decideix passar abans pel riu, per tal de refrescar l'animal.

Si suposem que el riu és la línia recta PQ, i que les següents distàncies són

$$AP = 9 \text{ km} \qquad PQ = 20 \text{ km} \qquad BQ = 6 \text{ km}$$



Quina és la distància mínima que recorreran $AR + RB$, mesurada en quilòmetres?

Nota: Les trajectòries, com les tres que es mostren a la figura, consten de dos segments rectes que toquen el riu en un únic punt R_i.

Solució 1. Considerem B' el punt simètric de B respecte del riu PQ. El punt R que busquem és la intersecció AB' amb PQ.

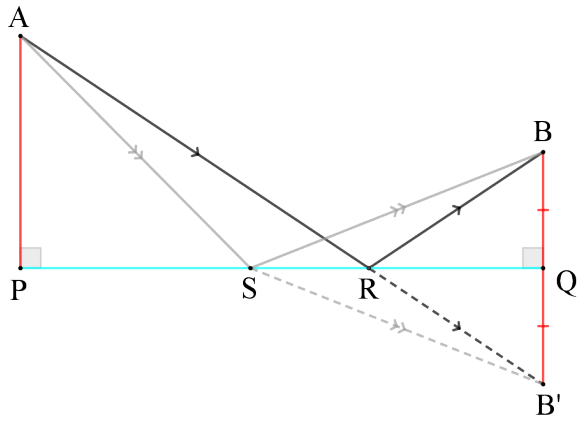
En efecte, suposem que hi ha un altre punt S que ens dona una trajectòria més curta.

$$AS + SB < AR + RB$$

Llavors, per simetria, estaríem dient que

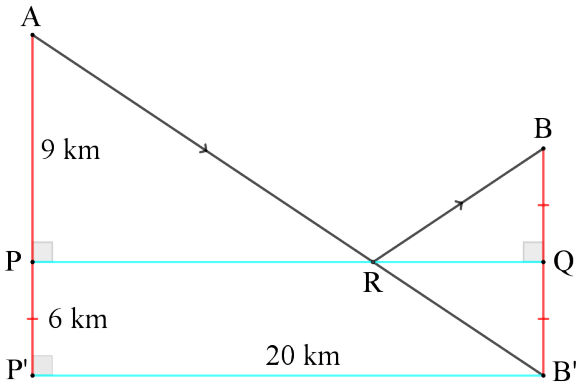
$$AS + SB' < AR + RB' = AB'$$

Però això és una contradicció amb la desigualtat triangular, ja que la trajectòria més curta entre dos punts del pla és la línia recta.



En resum, la distància mínima que cerquem és $AR + RB = AR + RB' = AB'$.

Per calcular-la, allarguem AP i tracem la paral·lela a PQ pel punt B'.



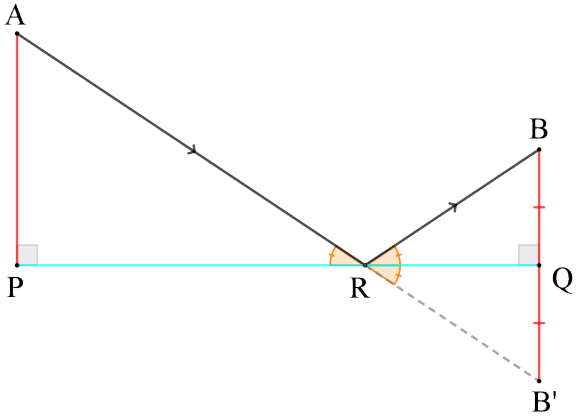
Llavors si considerem el triangle rectangle $AP'B'$, podem aplicar Pitàgores

$$\begin{cases} AP' = AP + BQ = 9 + 6 = 15 \\ P'B' = PQ = 20 \end{cases}$$

$$\implies AB' = \sqrt{(AP')^2 + (P'B')^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

En conclusió, la mínima distància que recorreran si van de A a B passant pel riu és de $\boxed{25 \text{ km}}$. □

Solució 2. Construïm el punt R com en la primera solució. Aleshores, notem que els següents angles són iguals $\angle PRA = \angle B'RQ = \angle BRQ$



Per tant, els triangles APR i BQR són semblants. Llavors, podem plantejar el següent sistema d'equacions i trobar quan val RQ.

$$\begin{cases} PR + RQ = PQ = 20 \\ \dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{AP}{BQ} = \dfrac{9}{6} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \ \frac{20 - RQ}{RQ} = \frac{9}{6}$$

$$\Longrightarrow \ RQ = \frac{120}{15} = 8 \qquad \Longrightarrow \ PR = 20 - 8 = 12$$

Aleshores, aplicant Pitàgores als dos triangles rectangles, obtenim finalment

$$\begin{cases} AR = \sqrt{AP^2 + PR^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \\ RB = \sqrt{BQ^2 + QR^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \end{cases}$$

De nou obtenim que la distància mínima és $AR + RB = 15 + 10 = \boxed{25 \text{ km}}$. □

Problema 3.22 (Maig 20)**.** L'Aina escriu els números de l'1 al 20, i després pinta cada un d'ells amb un color (que pot ser diferent per a cadascun).

Direm que una coloració dels números és *bonica* si sempre existeix un color tal que, entre els números pintats amb aquest color n'hi ha dos que la seva diferència és múltiple de 6.

Si totes les coloracions que pot fer l'Aina són boniques, quants colors té com a màxim?

Solució. Primer de tot hem de notar que si tenim un conjunt qualsevol de 7 números $\{n_1, n_2, \ldots, n_7\}$, sempre n'hi haurà dos tal que la seva diferència és múltiple de 6.

En efecte, si considerem els residus que donen al dividir per 6 diguem $\{r_1, r_2, \ldots r_7\}$ tenim set números que poden prendre només sis valors: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Per tant, pel principi del colomar hi ha d'haver dos que siguin iguals, per exemple $r_1 = r_2$. Llavors, si considerem $n_1 - n_2$ aquest número serà múltiple de 6.

Per tant, si podem assegurar que hi ha 7 números pintats del mateix color, ja haurem acabat.

Si tinguéssim 4 colors diferents podríem pintar 5 nombres de cada un dels colors, i no podríem assegurar el que hem dit abans.

En canvi, si tinguéssim 3 colors, segur que passa. Si no hi hagués cap conjunt de

7 nombres del mateix color, aleshores podríem tenir com a màxim $6+6+6=18$ nombres pintats: no els hauríem pintat tots.

Per tant, el màxim que pot tenir l'Aina és $\boxed{3 \text{ colors}}$, i amb aquests totes les coloracions que faci seran boniques.

Nota: Com a afegit, aquí hi ha un contraexemple amb 4 colors que no és bonica.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

□

Problema 3.23 (Abril 20)**.** Una cadena de restaurants italians ha desenvolupat 4 noves receptes de pizza, però abans d'afegir-les definitivament al menú, volen esbrinar si tindran èxit entre els seus clients. Per fer-ho, trien 2 de les seves pizzeries per fer la prova.

Enviaran les 4 receptes complint la següent condició: **Entre les dues pizzeries, rebran totes les receptes.** Complint aquesta condició, de quantes maneres poden fer la distribució?

Solució. Diguem P_1, P_2 a les pizzeries, i r_1, r_2, r_3, r_4 les diferents receptes. Anem a fixar-nos què passa amb una de les receptes, per exemple r_1. Aquesta recepta r_1 la podem distribuir de la següent manera:

- Només a P_1
- Només a P_2
- Tant a P_1 com P_2

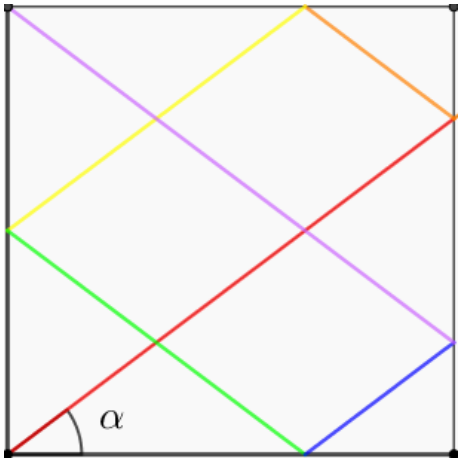
És a dir, tenim 3 possibilitats, ja que cal que r_1 sigui enviada mínim a una de les pizzeries.

Com que aquesta tria la podem fer per a cada una de les 4 receptes, de manera independent entre elles, tenim que en total hi ha $\boxed{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81}$ possibles distribucions.

Seguint el mateix argument, es pot veure que si tenim n receptes i k pizzeries, el nombre de distribucions amb aquestes condicions és $(2^k-1)^n$. En el nostre exemple, $n=4$ i $k=2$, així que efectivament hi ha $(2^2-1)^4 = 3^4$ distribucions. □

Problema 3.24 (Març 20)**.** La Marta s'ha comprat un raig làser a la fira, que emet un raig de llum que pot viatjar una distància de fins a 5 metres en línia recta. Tota emocionada, li explica al seu professor de física la seva adquisició, i ell li proposa el següent experiment.

Es tracta de muntar un quadrat d'1 metre per 1 metre amb parets que tenen un mirall per dins, i detectors de llum a les cantonades. Llavors, des de la cantonada inferior esquerra encendre el làser, que rebotarà a les parets seguint la llei de la reflexió (mateix angle d'incidència que de sortida). L'objectiu és mesurar per a quins angles inicials (entre 0 i $\frac{\pi}{2}$, com s'indica a la figura), aquest raig arribarà a una cantonada, activant un dels detectors.

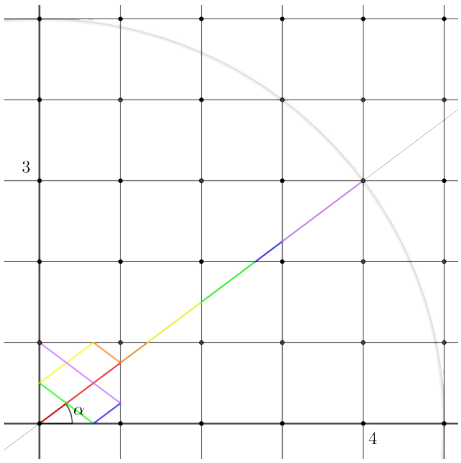


Mentre el professor de física comença a fer dibuixos i aproximacions, la seva professora de matemàtiques que seguia la conversa, s'apropa i afegeix: "Marta, crec que no necessites cap experiment per saber això. De fet, si tal com dius el làser pot recórrer fins a 5 metres justos, ja he calculat quants angles trobaràs".

En efecte, la professora de matemàtiques té raó, i es pot saber quants angles donaran una trajectòria que acabi en una cantonada, tenint en compte la limitació de distància. Pots dir quants en són?

Solució. Anem a relacionar la trajectòria que segueix la bola amb la gràfica de la recta $y = \text{tg}\alpha \cdot x$. En efecte, si la bola no rebotés dins del quadrat seguint la llei de

la reflexió, aquesta descriuria una línea recta.

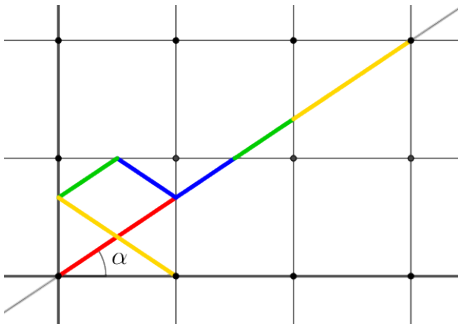


En aquest context, és evident que la condició que la partícula arribi a una cantonada és equivalent a que la recta passi per un punt del pla de coordenades enteres.

Ara bé, això només passarà si el pendent de la recta és un número racional. En efecte, si passa per un punt de coordenades enteres $(x, \text{tg}\alpha \cdot x) = (a, b) \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ i, per tant, és un número racional. A partir d'ara, considerarem que a, b són enters sense cap factor en comú, i positius ja que l'angle inicial està a $[0, \pi/2]$.

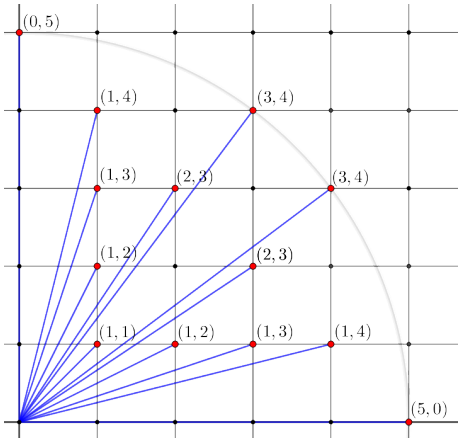
Llavors, si tenim la recta $y = \frac{b}{a}x$, el primer punt de coordenades enteres pel qual passarà és (a, b). En conseqüència, la distància recorreguda és, d'acord amb el teorema de Pitàgores $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Si el que busquem és els angles que ens donen una distància inferior o igual a 5, ens hem de fixar en els punts de coordenades enteres positives que quedin dins el cercle de radi 5 centrat a l'origen (en la següent imatge hem triat el $(4, 3)$ i n'hem dibuixat la trajectòria associada).



En efecte, per a cada parella (x, y) d'enters coprimers obtenim un angle amb tangent

$\text{tg}\frac{y}{x}$ (si no fossin coprimers estaríem comptant angles de més, per exemple el punt $(2,4)$ ens dona el mateix angle que el punt $(1,2)$). Així doncs, l'angle trobat ens determina una trajectòria que acaba en una cantonada i recorre una distància menor o igual a 5. Per tant, com que hi ha 13 d'aquests punts, el nombre que la Marta cerca és $\boxed{13}$.



□