

Problemes del mes de gener de 2023

Envieu les vostres respostes a

www.contrarellotge.cat/problemes-del-mes

6è de Primària

La Marge Simpson prepara el sopar de cap d'any per a la seva família. A més de la mare Marge, la família inclou el pare Homer, i els tres fills - Lisa, Bart i Maggie. Per postre hi ha gelat i pastís de poma suficient per a tothom. També hi ha dos dònuts idèntics que la Marge oferirà als nens en ordre d'edat, donant a cada nen com a molt un dònut. Els dònuts que no vulguin els nens se'ls menja, naturalment, l'Homer (fins i tot si sobren els dos). La Marge també sap que si algú menja gelat l'Homer sempre s'hi apunta (i si ningú més en menja pot ser que en vulgui igualment). El mateix val per al pastís de poma.

La Lisa està estudiant combinatòria al cole i troba interessant calcular totes les possibles combinacions que hi ha per assignar els postres. Per exemple, una possibilitat és que la Maggie menja gelat, el Bart menja pastís de poma i dònut, la Lisa no menja res per postre, la Marge menja gelat amb pastís de poma, i l'Homer menja gelat, pastís de poma i l'últim dònut.

La Lisa diu que li ha sortit un nombre interessant. Quantes combinacions ha trobat la Lisa si les ha comptat correctament?

2n d'ESO

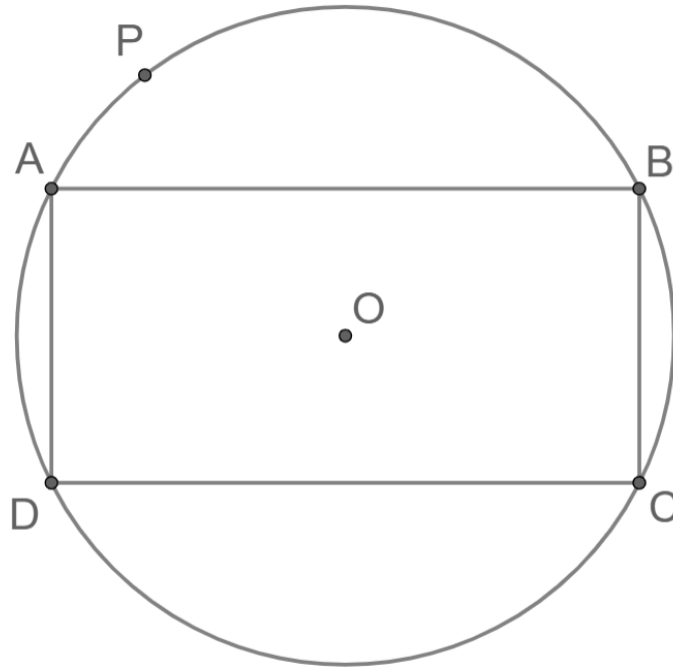
Considerem la següent suma de fraccions:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

Si escrivim aquesta suma com una fracció irreductible $\frac{p}{q}$, quina és la potència de 2 més gran que divideix a q ?

4t d'ESO

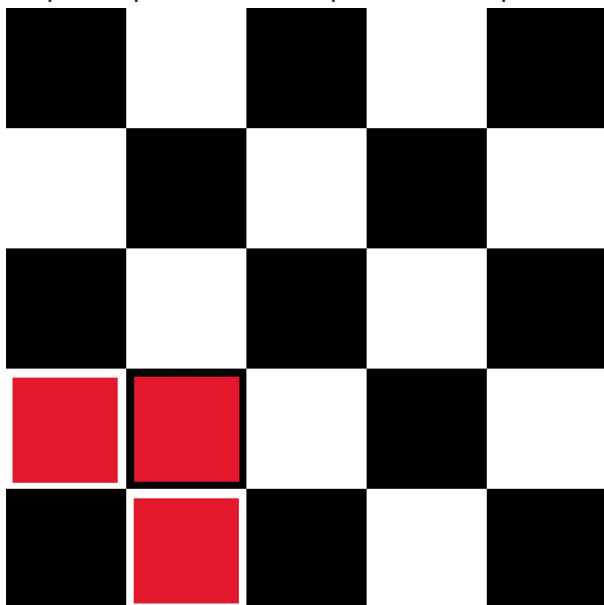
Tenim un rectangle de costats 2 i 4 inscrit en una circumferència. Siguin A, B, C, D els seus vèrtexos i P un punt de la circumferència en l'arc entre A i B de manera que $AP = 1$.



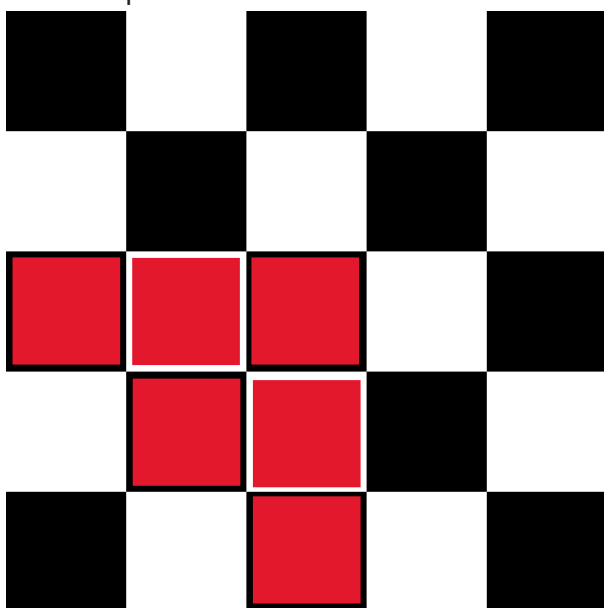
Aleshores quant val $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$?

2n de Batxillerat

Un rei es mou per un tauler 5x5 amb patró de tauler d'escacs, començant en la cantonada inferior esquerra. En cada passa pot moure's una casella cap a dalt, una casella cap a la dreta o en diagonal cap a la casella que comparteix l'esquina superior dreta. Depenent de la successió de passes escollides, el rei en 1 passa pot acabar en qualsevol d'aquestes caselles:



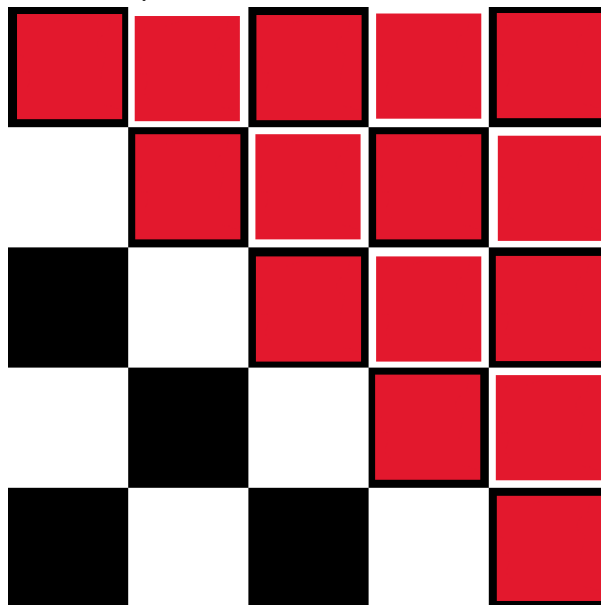
En 2 passes pot acabar en una d'aquestes:



En 3 passes pot acabar en una d'aquestes:



I en 4 passes pot acabar en una d'aquestes:



Observeu que les caselles on pot estar al cap d'un nombre de passes formen una mena de triangle rectangle, que té una vora amb tres costats, un horitzontal, un vertical i un diagonal.

El rei fa 4 passes en total. Suposant que cada pas que fa el rei l'escull entre les tres possibilitats amb probabilitat uniforme (igual per totes les possibilitats), sigui p/q la probabilitat de que el rei es mantingui en la vora dels triangles en tot el seu recorregut. És a dir, que després de la primera passa estigui en la vora del triangle de la primera imatge, després de la segona esitgui en la vora del triangle de la segona imatge...

Si simplifiqueu la fracció p/q , quina és la suma del numerador i el denominador?